Problemas Fundamentos Física II, 2002-2003. Algunos problemas complementarios: grupo A.

Campos eléctrico y gravitatorio.

1. Calcule, mediante el principio de superposición y utilizando una integral de volumen el campo eléctrico producido por un cuerpo esférico de radio a, dentro y fuera del cuerpo a distancia r de su centro, cuando 1) La carga q está uniformemente distribuída sobre su superficie (esfera hueca). 2) La carga está distribuída uniformemente sobre todo el sólido (esfera maciza). **Pista:** Utilice el teorema de Gauss para conocer el resultado correcto. **Lectura:** Alonso-Finn, sección 13.7 vol. I.

2. Describa matemáticamente el movimiento de Marte para un observador situado en la Tierra. Por simplicidad suponga las órbitas circulares, y tome $t = 0$ cuando ambos planetas estén alineados con el Sol, uno de cada lado. Muestre que para $t \simeq 3 \cdot 10^7$s y para $t \simeq 3.8 \cdot 10^7$s se observa un cambio de sentido del movimiento angular marciano. **Pista:** Calcule el vector posición del Sol respecto a la Tierra, el vector posición de Marte respecto al Sol, y compóngalos.

3. Un móvil se desplaza a lo largo de una trayectoria en espiral plana dada por $r = k\phi + r_0$, con k, r_0 constantes. Además se observa el cumplimiento de la ley de las áreas $A = v_A\, t$. Encontrar la naturaleza de la fuerza que afecta al móvil y su posición respecto al tiempo. **Lectura:** Para calcular elementos de área en coordenadas polares, Marsden-Tromba, "Cálculo Vectorial", sección 6.3 "Teorema del Cambio de Variables", contiene varios ejemplos.

4. La ecuación de una sección cónica en coordenadas polares con el origen en un foco es
$$\frac{ed}{r} = 1 + e\cos\phi \ .$$
Dibuje secciones con $d = 1$ (que fija la unidad de longitud) y sucesivamente $e = 0$, $e > 0$, $e < 0$. Calcule la energía de una partícula en un campo central. (Resultado:
$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$
donde $L = mr^2\frac{d\phi}{dt}$ es el momento angular) y gracias a la conservación de E, L, obtenga $\frac{dr}{d\phi}$. Compare con el resultado obtenido de la sección cónica y decida si el signo de la energía y el de la excentricidad e están relacionados. Obtenga las relaciones $L^2 = Gm^2Ma(1-e^2)$, $E = -GmM/a$, con $a = \frac{ed}{1-e^2}$. Deduzca la tercera ley de Kepler para el movimiento elíptico. Resuelva ahora el siguiente ejercicio.

5. El cometa Halley sigue una órbita elíptica alargada alrededor del Sol. En el perihelio el cometa está a $8.75 \cdot 10^7$ km del Sol, en el afelio a $5.26 \cdot 10^9$ km del Sol.
   - Calcule el semieje mayor, la excentricidad y el periodo de la órbita.
   - Si una mejor determinación de la masa del cometa alterara el valor aceptado de m en un 10%, ¿ Cuál sería el cambio de L, E, e?
   - ¿ Cómo se puede determinar la masa de un cometa?

6. Se disponen dos masas m iguales en revolución circular alrededor de su centro de masas (en reposo). Encuentre su velocidad v equilibrando la fuerza centrífuga que experimenta con la atracción gravitacional en función del radio r que los separa. Encuentre aquellos puntos del plano orbital donde, depositando una partícula de masa muy pequeña con la velocidad adecuada, su posición relativa a las otras dos no varía con el tiempo (puntos de Lagrange). ¿ Puede decidir si alguno de estos puntos es de equilibrio estable?. **Pistas:** Reducir mediante simetría el problema a una dimensión. Un punto es evidente. Dos se pueden obtener de forma algebraica rápidamente. Utilizar algún método de cálculo numérico aproximado para hallar los otros dos.

7. Estúdiese el desarrollo en serie de $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ en potencias de $\frac{r'}{r}$ hasta orden 3 inclusive. Agrúpense los términos del mismo orden, y compare sus coeficientes (funciones del coseno del ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{r}'$) con los polinomios de Legendre. **Consulta:** un libro de tablas o de métodos matemáticos de la física.

8. Considere dos cargas iguales y de signo opuesto q, separadas por una distancia a. Obtenga, utilizando la expansión del ejercicio anterior, y en coordenadas cilíndricas, el potencial eléctrico y el campo a gran distancia. Repita para un sistema de cuatro cargas en un cuadrado de lado a, con las dos cargas positivas en una diagonal y las dos negativas en la opuesta (resolver en este caso sólo para el plano del cuadrado).

9. Demuestre que un desplazamiento a lo largo de una línea de campo eléctrico obedece a la relación
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rE_r}{E_\theta}$$
(en coordenadas polares planas). A gran distancia de un dipolo eléctrico, demuestre que las líneas de campo satisfacen la ecuación $r = r_m \text{sen}^2\theta$, donde r_m es la distancia máxima al origen para cada línea de campo. **Fuente:** Lee y Burke, La Naturaleza de las Cosas, 1998 Brooks Cole.

10. Se da un campo eléctrico en coordenadas cilíndricas $\vec{E} = E_0(r/a)^3\hat{r}$ para $0 < r < a$, $\vec{E} = 0$ para $r > a$. Encuentre la densidad volumétrica de carga.

Electricidad y Magnetismo.

1. (Reglas de Kirchoff). En el circuito de arranque de un automóvil se conecta la batería a un motor de arranque de resistencia $R = 0.2\Omega$. Como su batería está parcialmente descargada y sólo ofrece una diferencia de potencial de 10 V (y resistencia interna 0.05 Ω), se conecta mediante cables la batería de otro vehículo (ver figura adjunta) que sí proporciona 12 V (y cuya resistencia interna es de 0.02 Ω). Calcule la potencia que proporciona el motor de arranque. (**Fuente**: Lea y Burke, La Naturaleza de las Cosas).

2. Calcular la capacidad equivalente del conjunto infinito de condensadores de la figura, entre los bornes a y b. Cambiando todos los condensadores por resistencias, calcúlese también la resistencia equivalente del nuevo montaje. (**Pista:** observe que el circuito no cambia si separamos el primer par de condensadores o resistencias de la izquierda, ya que es infinito).

3. El Puente de Wheatstone (ver figura) permite medir una resistencia desconocida R_2 comparándola con otras tres conocidas R_1, R_3, R_4. La condición de equilibrio del puente es que el amperímetro en el centro marque exactamente cero. Obtenga en ese momento R_2 en términos de las demás resistencias.

4. En una región del espacio hay un campo eléctrico paralelo al eje y: $\vec{E} = E\hat{e}_y$, además de un campo magnético a lo largo del eje z: $\vec{B} = B\hat{e}_z$. Si el cociente $E/B << c$, siendo c la velocidad de la luz (para despreciar efectos relativistas), resuelva las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en esta región. Obtenga para ello las ecuaciones de movimiento (mediante la ley de Lorentz). Efectúe una transformación de Galileo a un sistema de referencia en movimiento a lo largo del eje X donde pueda eliminar el campo eléctrico. Resuelva allí el movimiento de la partícula, y deshaga la transformación de Galileo para obtener la solución en el sistema de referencia inicial. (**Lectura:** este ejemplo está resuelto en Alonso-Finn, tomo 2, ej. 15.4).

5. Un haz de electrones cilíndrico, de radio R, con densidad uniforme $n\ e^-$ por metro cúbico, viaja con velocidad v_0. Sobre el borde del haz:
   a) Calcule los campos eléctrico y magnético.
   b) Calcule la fuerza que experimenta un electrón en el borde del haz. ¿Aumenta o disminuye el área de una sección del haz?. ¿Cambiaría la respuesta si el haz se compusiera de partículas con carga positiva?.
   c) En el recorrido de un tubo de televisión (longitud 15 cm), para un haz de radio $R = 0.1$mm, velocidad $v = 9.4\ 10^7$ m/s, y densidad $n = 10^{10}\mathrm{e}^-/\mathrm{m}^3$, y considerando como buena aproximación el que la fuerza es constante, calcular el desplazamiento transversal debido a ella de uno de los electrones exteriores del haz.

6. Una espira de alambre (con forma de anillo de radio 5 cm) conduce una corriente de 1 amperio. Calcule su momento magnético, la intensidad de campo magnético a 1 m de distancia sobre el eje del anillo, y compárelo con la intensidad del campo magnético terrestre.

7. Por un solenoide infinitamente largo y de radio 10 cm, vacío en su interior y que contiene 20 espiras por cm de longitud, circula una corriente de 0.1 A. Calcule el campo magnético en su centro. Ahora se introduce en el solenoide un cilindro de un material paramagnético que encaja con igual radio. Calcule el campo de nuevo en el eje del solenoide en función de la susceptibilidad magnética del material, y evalúelo para un valor 10^{-5}. Repita si el material es diamagnético, y por último si es ferromagnético, pero aceptando la relación lineal $M = \chi_M H$, con $\chi_M = 10$.

8. La espira rectangular de la figura puede girar alrededor del eje Y y lleva una corriente de 10 A en el sentido indicado.
   a) Si la espira está en un campo magnético uniforme de 0.2 T paralelo al eje X, calcular la fuerza en N sobre cada lado de la espira y el torque en N m, requerido para mantener la espira en la posición que se muestra.
   b) Repita si el campo es ahora paralelo al eje Z.
   c) En este último caso, ¿Qué torque se requeriría si el eje de giro, paralelo todavía al eje Y, pasase por el centro de la espira?

9. (Ley de Faraday) Una bobina de 1000 vueltas está enrollada alrededor de un solenoide muy largo que tiene 10^4 vueltas por metro y una sección transversal de 2 10^-3 m^2. La corriente en el solenoide es de 10 A. Hallar la f.e.m. inducida en la bobina si en 0.3 s, la corriente del solenoide: a) Se reduce a cero. b) Se duplica. c) Se invierte.
   A continuación considere dos bobinas enrolladas de N_1 y N_2 vueltas, situadas de modo que todo el flujo magnético generado por la primera bobina pase por la segunda (aproximadamente). Encuentre la fem inducida en la segunda bobina V_2 cuando la fem aplicada entre los extremos de la primera es V_1. (Este es el fundamento del transformador).

10. Considérese el sistema de unidades cgs donde las unidades de longitud, masa, y tiempo son el centímetro, el gramo y el segundo respectivamente. Obténgase el valor de las unidades de fuerza (dina) y energía (ergio) en términos de unidades del SI. Extendamos ahora este sistema de unidades mecánicas al sistema gaussiano de unidades para el electromagnetismo. Para ello tómese la fuerza entre dos cargas (ley de Coulomb):

$$F = \frac{qq'}{R^2}$$

    con fuerza y distancia medidas en el cgs. Esto define la unidad de carga "statcoulomb". Exprésese en culombios. Obténganse las correspondientes

unidades de intensidad de corriente ("statampere"), de capacidad ("statfarad"), y de resistencia ("statohm").
La fuerza magnética por unidad de longitud entre dos corrientes rectilíneas en el SI de unidades era:

$$F = \frac{2\mu_0 I I'}{4\pi R}$$

. En el sistema gaussiano esta fuerza por unidad de longitud se toma como

$$F = \frac{2II'}{R} \quad :$$

escribir las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial en ambos sistemas de unidades y obtener la unidad del sistema gaussiano para la medida de la inducción magnética, B, en términos de las unidades del SI.

11. Demuestre que las siguientes funciones resuelven las ecuaciones de Maxwell:

$$E_y = -H_0\mu_0\omega\frac{a}{\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}(kz-\omega t)$$
$$H_x = H_0 k\frac{a}{\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}(kz-\omega t)$$
$$H_z = H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(kz-\omega t)$$

siendo cero E_x, E_z, H_y, x un número entre 0 y a, mientras que H_0, a, k, ω son constantes. Ello es posible si se cumple una cierta relación entre ω y k. Encuéntrela. ¿Qué distribuciones de carga y corriente hay en la región donde son válidas estas ecuaciones?. (**Fuente**: R. K. Wangsness, Electromagnetic Fields).

12. Un generador simple tiene una espira rectangular de 10.0 y 5 cm de lado, con diez vueltas, que gira en un campo magnético de 1.5 T. Calcule la fem máxima generada cuando gira a 60 Hz. Si ahora se coloca la espira en serie con una resistencia, calcule la potencia disipada en la resistencia y demuestre que es igual a la potencia mecánica necesaria para hacer funcionar el generador. (**Fuente**: Lea & Burke, La Naturaleza de las Cosas).

Fenómenos ondulatorios.

1. Se produce una cierta onda por medio de una fuente cuyo movimiento puede ser representado por

$$y = \frac{8}{\pi^2} A(\text{sen}\omega t - \frac{1}{3^2}\text{sen}3\omega t + \frac{1}{5^2}\text{sen}5\omega t - \ ...$$

   - Construír aproximadamente la forma de la onda sumando gráficamente los tres primeros términos.
   - ¿A qué se reduce la forma de la onda tomando todos los términos de la serie? (esta curva se conoce con el nombre de "diente de sierra").
   - Dé la expresión de una onda viajera que tenga la misma forma y se propague hacia la derecha con velocidad v, independientemente de su frecuencia.

   (**Fuente:**Alonso-Finn. **Ayuda:** recuerde que $1 + (1/3)^2 + (1/5)^2 + \ ... = \pi^2/8$.)

2. Una cuerda de un violonchelo tiene una densidad lineal de masa $\mu = 1.6$ g/m, y mide 70 cm. ¿Qué tensión se requiere para que produzca la nota La(440 Hz)? ¿Qué cuatro armónicos más bajos se pueden producir? ¿A qué velocidad mínima se tiene que desplazar un observador para que la nota esté desafinada en 1 Hz? ¿Y para que se pueda confundir con las notas Sol o Si más cercanas en la escala natural?

3. Una sirena de radio 20 cm (tómese como esférica) emite ondas de 5000 Hz, cuya amplitud de presión en la superficie de la sirena es de 2.0 Pa. ¿A qué distancia de la sirena es ésta vagamente audible? (intensidad sonora de unos 0 dB). ¿ A qué distancia causa dolor? (unos 130 dB). ¿Cambian estos resultados si el vehículo se acerca o aleja con una velocidad de 100 km/h?.

4. Dos timbres están alejados 25 cm entre sí. Una persona en dirección 15^o respecto al segmento que une los timbres no oye el sonido cuando tocan ambos la misma frecuencia. ¿Qué frecuencia es ésta?. Razone si este efecto se puede dar en una sala de conciertos.

5. Un haz luminoso pasa del aire (ìndice de refracción n_1) a un prisma con forma de paralelepípedo de vidrio (n_2). Demostrar que si el haz entra y sale por caras paralelas, lo hace con el mismo ángulo. ¿Con qué ángulo lo hará si sale por una cara perpendicular?

6. a) ¿Por qué se construyen los radiotelescopios con forma de paraboloide de revolución?.
   b) Los espejos invierten la izquierda y la derecha. ¿Por qué no invierten las direcciones "arriba" y "abajo"?.

7. a)Se disponen dos lentes delgadas de distancias focales f_1 y f_2 una a continuación de otra. Encontrar los dos focos del sistema compuesto por ambas (Resuelto en Alonso-Finn II, ejemplo 21.9)
   b) Si se dispone de dos lentes convergentes de distancias focales 40 y 5 cm respectivamente, ¿cuál es la configuración óptima para construír un catalejo?. ¿Qué inconveniente tiene este sistema? ¿Cómo se puede corregir?
   c) Un telescopio de Galileo tiene un objetivo de lente convergente que forma una imagen en el primer foco del secundario divergente. Demuestre que la imagen final es derecha, y encuentre el aumento angular.

8. Se conecta un horno microondas cúbico de lado medio metro y de potencia 500 W, en el que se ha hecho el vacío. Suponiendo que toda la potencia se encuentra en la cavidad en forma de radiación, ¿Cuál es la presión sobre las paredes en función del tiempo?. Compare con la presión atmosférica. ¿Cuánto es necesario esperar para que el efecto fotoeléctrico funcione sobre las paredes del microondas?.

9. Calcular el ángulo de Brewster para la incidencia de un haz luminoso en la interfaz entre aire (n=1.00029) y cuarzo (n=1.51). Encontrar también el ángulo de reflexión total para la luz emitida dentro del cuarzo. Comparar con los valores correspondientes al agua (n=1.33).

   Física Cuántica.

10. Para un cuerpo negro, la densidad de energía monocromática (energía emitida con longitud de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$) es

$$dE(T,\lambda) = \frac{8\pi c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \ .$$

    Obtenga la función $T_{max}(\lambda)$ para la que $dE(T_{max}, \lambda)/d\lambda$ alcanza su valor máximo. Esta función encierra la "Ley del Desplazamiento Espectral de Wien". Nótese que deberá aproximarse la solución numéricamente. Obtenga asímismo la energía total integrando sobre λ, y deduzca la ley de Stefan-Boltzmann $E \ \alpha \ T^4$.

11. Demuestre que el cociente entre la longitud de onda de Compton y la de De Broglie para una misma partícula es igual a $\sqrt{\left(\frac{c}{v}\right)^2 - 1}$.

12. Mediante conservación de energía y momento, razone que un electrón en el espacio libre no puede absorber totalmente un fotón (esto es, en el efecto Compton el fotón saliente tiene momento no nulo). ¿Cómo es posible el efecto fotoeléctrico?

13. La fórmula clásica de la ptencia irradiada por un electrón e^- acelerado es

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

donde a es la aceleración del electrón. Evalúe la potencia clásica irradiada en la n-ésima órbita de Bohr. Estime el tiempo de transición a la (n-1)-ésima órbita y compare con el valor real para n=2 (10^{-8} s).

14. a)Estime la imanación máxima de un bloque de hierro suponiendo que hay dos espines no apareados por cada átomo, y la magnetización (imanación) se relaciona con el espín promediado mediante $M = -Ng\mu_B < S >$. (N es el número de átomos por unidad de volumen, g un factor, llamado de Landé, que puede tomarse igual a 2, $< S >= 1$, y $\mu_B = \frac{eh}{2m_e 2\pi}$). b) Si en un anillo de hierro espontáneamente imanado se efectúa un corte estrecho, estime la inducción magnética en el aire entre los polos del imán así creado y estime el número de vueltas de alambre por unidad de longitud que deberían enrollarse alrededor de un anillo hueco de cartón para, con una corriente de $1A$, conseguir un electroimán de igual inducción.

15. (Incertidumbre de Heisenberg) Suponiendo que un haz de electrones con longitud de onda de De Broglie 10^{-6} m pasa por una rendija de 10^{-4} m, ¿Qué dispersión angular se introduce a causa de la difracción en la rendija?.

16. Mediante la fórmula de Balmer, determine las longitudes de onda de las líneas visibles en el átomo de hidrógeno. ¿Cuál es la menor longitud de onda posible para cada una de las series de Lyman, Balmer, Paschen, Brackett y Pfund? ¿ En qué parte del espectro está cada línea?