LABORATORIO DE FÍSICA COMPUTACIONAL
DEPARTAMENTOS DE FÍSICA TEÓRICA I y II

ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

BREVE INTRODUCCIÓN A MAPLE Y CAMPOS DE RADIACIÓN

NOMBRE:
NOMBRE:
GRUPO:

Comandos básicos de Maple

Si en el futuro le fuese necesaria, puede encontrar Vd. mas ayuda abriendo con el raton el menu "help" en la esquina superior derecha donde encontrara un "New Users Tour" (mas amplio que estas notas) y un indice de busqueda especifico.

Maple como calculadora

Los comandos en Maple se escriben en una ***línea de comando***. Deben acabar en punto y coma

```
> 1+1;
> 2^10;
> 3489*23256/51;
> (2^30/3^20)*sqrt(3);
> 4*(3+Pi);
>
```

La evaluación numérica se fuerza con el comando **evalf** (% se refiere al último output)

```
> evalf(%);
```

con precisión arbitraria

```
> 200!;
> evalf(Pi,1000);
```

Maple remite operar con variables sin un valor asignado, de forma "simbólica"

```
> a;
```

Para dar un valor a una variable (que Maple ha de recordar si vuelve a utilizar la variable) se utiliza en ***operador de asignación*** (**:=**).

```
> a:=4;
> a;
```

El comando **unassign** elimina asignaciones previas:

```
> unassign('a');a;
```

El comando **restart** borra todas las definiciones y asignaciones realizadas.

```
> restart;
```

Expresiones y funciones

En Maple están definidas la mayoría de las funciones básicas del análisis matemático, existiendo definiciones para valores especiales:

```
> sin(5*Pi/3);
> sec(Pi/4);
> arcsin(-1);
```

Existen funciones generales de manipulación de expresiones matemáticas. La función **expand** tiene un efecto determinado sobre funciones trigonométricas:

```
> expand(sin(2*x));
> expand(cos(4*x));
```

La función **simplify** intenta simplificar expresiones, aunque no siempre produce una respuesta unívoca:

```
> simplify(%);
> simplify(cos(4*x));
```

Se pueden definir funciones adicionales, cuya sintaxis es la de una correspondencia entre elementos de dos conjuntos:

```
> mifuncion := (x,y) -> abs(x-y);
```

Ahora disponemos de una función nueva, **mifuncion(x,y)**.

```
> mifuncion(3,5);
> mifuncion(-4,3);
```

Se puede usar la función **solve** para resolver ecuaciones de forma exacta

```
> solve( x^3-6*x^2+11*x-6=0, x);
```

(como es una ecuación cúbica, nos ha dado 3 soluciones). Con parámetros:

```
> solve( x^3-a*x^2+11*x-6=0, x);
```

fsolve calcula la solución numérica en un intervalo

```
> f := sin(x + y) - exp(x)*y = 0:
  g := x^2 - y = 2:
  fsolve( {f, g}, {x = -1..1, y = -2..0} );
```

Cálculo infinitesimal

```
> restart;
```

Se pueden calcular derivadas e integrales de modo simbólico, tomándose las variables no asignadas como constantes.

```
> f:=x-> x*sin(a*x)+b*x^2;
> df:=diff(f(x),x);
> int(df,x);
> simplify(%);
```

Se pueden calcular integrales definidas.

```
> int(df,x=0..1);
```

Para hallar los extremos de una función podemos hacerlo con la derivada o usar un comando específico para ello:

```
> f := x-> x*(x-1)*(x+1);
```

Gráficos

```
> restart;
```

Para representar gráficamente una función dada por una expresión podemos usar el comando plot. Por ejemplo, la gráfica de $3\,x^2-8$ para x de - 5 a 5 .

```
> plot(3*x^2-8,x=-5..5);
```

Funciones como ésta tienen muchas opciones, para conocerlas se puede consultar la ayuda de Maple

```
> ?plot
```

La función dibujada puede estar definida fuera del comando plot:

```
> f:=x-> sin(1/x);
> plot(f(x),x=0..1);
```

Mas aún, se pueden definir como funciones dependientes de algún parámetro las propias gráficas. Esto es especialmente útil a la hora de representar varios gráficos simultáneamente, para lo cual hemos de cargar primero el paquete "plots" de maple:

```
> with(plots);
> f:= (x,k) -> k*x;
> gr:= k-> plot(f(x,k),x=0..1/k);
> display(gr(1),gr(2),gr(3));
```

Se pueden representar funciones dadas en coordenadas polares usando la siguiente opción:

```
> plot(sin(x), x=0..2*Pi,coords=polar);
```

Se pueden crear gráficos tridimensionales (obsérvese el uso de algunas opciones nuevas)

```
> plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2, axes=BOXED, title=
  "Gráfico de una superficie");
```

Pruebe a pinchar con el raton sobre la imagen y rote la figura.

Para representar funciones en coordenadas esféricas podemos utilizar la siguiente notación:

```
> plot3d(1,phi=0..2*Pi,theta=0..Pi/2, coords=spherical,
  scaling=constrained, axes=boxed);
```

También se puede dibujar valores de una lista.

```
> lista:=[seq([t^2, cos(t)], t=0..40,0.01)]:
> listplot(lista);
```

Resolución de ecuaciones diferenciales con Maple

```
> restart;
```

Problemas de valores iniciales

Definamos un sistema de ecuaciones diferenciales simple (aceleracion=0) . Para ello nos hace falta una lista:

```
> Aceleracion:=diff(x(t),t,t),diff(y(t),t,t),diff(z(t),t,t);
> 
```

Necesitaremos resolver un problema de valores iniciales. He aqui el valor inicial:

```
> valor_inicial:=x(0)=0, y(0)=0, z(0)=0, D(x)(0)=1,D(y)(0)=1,
  D(z)(0)=0;
> 
```

Resolvamos el ststema de manera exacta:

```
> dsolve({Aceleracion, valor_inicial},{x(t),y(t),z(t)});
```

A continuacion obtengamos la solucion numerica en un intervalo y dibujemosla:

```
> solucion:=dsolve({Aceleracion, valor_inicial},numeric, {x
  (t),y(t),z(t)},range=0...2);
> with(plots): odeplot(solucion, [x(t),y(t),z(t)],0..2,axes=
  boxed);
> restart;
```

Partícula cargada en campos eléctrico y magnético constantes y perpendiculares

Resolvamos a continuacion la ecuacion de Lorentz no relativista para E,B perpendiculares (unidades SI).

```
> q:=1.6E-19; m:=9.1E-31; c:=3E8;
> E:=Vector[row]([1E7,0,0]);
> B:=Vector[row]([0,0.42,0]);
```

En vista de ello, la fuerza por unidad de masa será:

```
> with(LinearAlgebra):
> Fuerza:= (r,v) -> (q/m)*(E+CrossProduct(v,B));
> pos:=Vector[row]([x(t),y(t),z(t)]);
> v:=Vector[row]([diff(x(t),t),diff(y(t),t),diff(z(t),t)]);
> Aceleracion:=Vector[row]([diff(x(t),t,t),diff(y(t),t,t),
  diff(z(t),t,t)]);
```

```
> total:=Aceleracion-Fuerza(pos,v);
```

La variable "total" contiene las ecuaciones de movimiento en un vector. Para pasarselas a odeplot, necesitamos una lista. Asi que extraemos las componentes del vector como sigue:

```
> Ecuaciones_movimiento := total[1],total[2],total[3]:
> valor_inicial:= x(0)=0, y(0)=0, z(0)=0, D(x)(0)=0,  D(y)(0)
  =1E7, D(z)(0)=1E7;
```

PREGUNTA: Resuelva numericamente con maple la ecuacion de Newton para esta fuerza y dibuje su solucion desde cero hasta 4E-10 segundos. De tambien la solucion analitica con maple. Comente brevemente sus resultados.

```
>
>
>
```

Distribuciones angulares de campos de cargas en movimiento

Movimiento rectilíneo uniforme

El campo próximo o de velocidad para una carga en movimiento uniforme es radial respecto a la posición actual de la partícula y el observador.
Pero el módulo de dicho campo depende de la dirección de observacion.

$$\boldsymbol{E}(\mathrm{t}) = e\frac{\boldsymbol{r}(t)}{r(t)^3\,\gamma^2\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

siendo θ el ángulo entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\beta}$ $\left(\beta=\frac{v}{c},\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$.

```
> restart;
```

PREGUNTA:
Suponiendo un movimiento uniforme en la dirección Z. a) Definir una función *campo*(θ,ϕ,β) que dé el módulo del campo a una distancia arbitraria en función de la dirección, con carga e=1. b) Dibujar esta intensidad de campo usando el comando de dibujo en coordenadas esféricas, para las

velocidades: β=0, β=0.5,β=0.9. Comentar los resultados.

PREGUNTA:a) Definir una función dibuja(β) que represente un corte bidimensional de la intensidad del campo anterior para la velocidad especificada. b) Mostrar en la misma gráfica (usando **display)** la intensidad para β=0,0.7,0.9.

```
> with(plots):
```

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

La distribución angular de potencia radiada en tiempo de emisión por una carga en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es:

$$\frac{\mathrm{d}\,P(t')}{\mathrm{d}\,\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c}\,\frac{\sin(\theta)^2}{(1-\beta\cos(\theta))^5}$$

siendo θ el ángulo entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\beta}$. Nótese que a es la aceleración dividida por c y que es paralela a β.

PREGUNTA: Suponiendo un movimiento uniformemente acelerado en la dirección OZ. Dibujar la potencia radiada usando el comando de dibujo en coordenadas esféricas, con carga e=1 y distintas velocidades: β=0, β=0.5,β=0.9 y aceleración a=1. Comentar los resultados.

PREGUNTA: Representar en dos dimensiones la potencia radiada por una carga en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado para varias velocidades, en coordenadas polares y cartesianas

PREGUNTA: Utilizando las funciones **fsolve** y **seq**, generar una lista de pares (β,theta_{max}), en donde $\mathrm{theta}_{\mathrm{max}}$ es el ángulo de máxima emisión para la velocidad β.

PREGUNTA: En la aproximación ultrarrelativista, el máximo de emisión se encuentra para el ángulo 1/2γ. Dibujar en la misma gráfica esta aproximación y el resultado exacto anterior (con **listplot**) en función de beta.

Movimiento circular uniforme

En el caso de movimiento circular uniforme:

$$\frac{\mathrm{d}\,P(t')}{\mathrm{d}\,\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c}\,\frac{\left(1-\dfrac{\sin(\theta)^2\cos(\varphi)^2(1-\beta^2)}{(1-\beta\cos(\theta))^2}\right)}{(1-\beta\cos(\theta))^3}$$

Siendo ***a*** la aceleración medida por un sistema de referencia inercial.

PREGUNTA: Representar la potencia radiada en el caso de un movimiento circular uniforme en el plano <u>*XZ*</u> suponiendo $e = 1$, $a = 1$ para diversos valores de β.Discutir los resultados. ¿En qué dirección se anula la potencia radiada?