UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos			
Nombre		DNI	
Asignatura	**Relatividad general y gravitación**	Grupo	**A y A2**
Curso	**4º**	Fecha	

Relatividad general y gravitación
Examen final - 8 de febrero de 2021

(Tiempo disponible: **2 horas 30 minutos**)

Problema 1 [1.5 puntos]. Señalar con una **V** las afirmaciones verdaderas y con una **F** las falsas. Cada respuesta incorrecta penaliza 0.25 puntos.

- $\boxed{\textbf{F}}$ El conmutador de dos campos vectoriales cualesquiera es otro campo vectorial sólo si se trata de campos de Killing.
- $\boxed{\textbf{V}}$ La cuadriaceleración a lo largo de la curva que sigue un observador en caída libre es nula.
- $\boxed{\textbf{V}}$ En una métrica estática la cuadrivelocidad de una partícula masiva en reposo es paralela al vector de Killing ∂_t.

Problema 2 [1 punto]. Completar el enunciado del principio de equivalencia de Einstein en cualquiera de sus formas

En todo punto del espacio en un campo gravitatorio arbitrario es siempre posible escoger un sistema de referencia ... **local** (llamado en caída libre) en el que las **leyes de la física** toman la misma forma que en un sistema de referencia inercial (=no acelerado) en ausencia de gravedad.

... **local** (llamado en caída libre) en el que las **leyes de la física** toman la misma forma que en relatividad especial.

... tal que para**tiempos muy pequeños y distancias muy pequeñas las leyes de la física** toman la misma forma que en relatividad especial.

0.5 por la descripción del sistema, **0.5** por la parte de leyes físicas/ausencia de gravedad. También vale el siguiente enunciado, aunque es más bien una consecuencia:

... local tal que en el punto la métrica se reduce a la de Minkowski y en un entrono del mismo los símbolos de Christoffel se anulan..

3 [2.5 puntos]. Calcular los símbolos de Christoffel $\Gamma^{\mu}{}_{tt}$ de la métrica

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{\cos^2\psi} + \frac{\ell^2 d\psi^2}{\cos^2\psi} + \ell^2 \tan^2\psi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right),$$

donde $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \psi < \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ y ℓ es una constante con dimensiones de longitud. Escribir sólamente los $\Gamma^{\mu}{}_{tt}$ distintos de cero.

$\Gamma^{\psi}{}_{tt} = \dfrac{\tan\psi}{\ell^2}$	**0.5**

Un observador se encuentra en reposo en el campo gravitatorio descrito por esta métrica. Calcular su cuadrivelocidad u^μ, su cuadriaceleración $a^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu$ y el cuadrado a^2 de ésta.

$u^\mu = = (\cos\psi_0, 0, 0, 0)$	**0.5**
$\psi_0 =$ coordenada ψ del observador	**0.5**

$a^\mu = \left(0, \dfrac{\sin\psi_0 \, \cos\psi_0}{\ell^2}, 0, 0\right)$	**0.5**

$a^2 = \dfrac{\sin^2\psi_0}{\ell^2}$	**0.5**

- Los Christoffel pedidos son

$$\Gamma^{\mu}{}_{tt} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\alpha}\left(\partial_t g_{\alpha t} + \partial_t g_{t\alpha} - \partial_\alpha g_{tt}\right) \overset{(1)}{=} -\frac{1}{2}\, g^{\mu\psi}\partial_\psi g_{tt} \overset{(2)}{=} -\delta^{\mu}{}_{\psi}\,\frac{1}{2}\, g^{\psi\psi}\partial_\psi g_{tt} \overset{(3)}{=} \delta^{\mu}{}_{\psi}\,\frac{\tan\psi}{\ell^2}\,.$$

En (1) se ha usado que los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ no dependen de t, por lo que sus derivadas temporales son cero; y también que g_{tt} sólo depende de ψ, por lo que $\partial_\alpha g_{tt}$ es distinta de cero sólo para $\alpha = \psi$. En (2) se ha usado que $g^{\mu\psi}$ es distinto de cero sólo para $\mu = \psi$, Y en (3) las expresiones de los coefficientes $g^{\psi\psi} = \cos^2\psi/\ell^2$ y $g_{tt} = -1/\cos^2\psi$.

- Por encontrarse el observador en reposo, las componentes espaciales de su cuadrivelocidad son cero,

$$\dot\psi = \dot\theta = \dot\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi, \theta, \phi \text{ constantes (importante)}.$$

Llamemos ψ_0 al valor de su coordenada ψ. La condición $u^2 = -1$ se reduce a $g_{tt}(u^t)^2 = -1$, o lo que es lo mismo, $(u^t)^2 = \cos^2\psi_0$. Tomando la raíz cuadrada y quedándonos con el signo positivo, que correponde a orientación futura, obtenemos $u^t = \cos\psi_0$.

- La cuadriaceleración es

$$a^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = u^t \nabla_t u^\mu = u^t\left(\partial_t u^\mu + \Gamma^{\mu}{}_{tt} u^t\right) = \Gamma^{\mu}{}_{tt}\left(u^t\right)^2 = \frac{\sin\psi_0\, \cos\psi_0}{\ell^2}\,\delta^{\mu}{}_{\psi}\,,$$

y su cuadrado

$$a^2 = g_{\mu\nu}\, a^\mu a^\nu = g_{\psi\psi}\,(a^\psi)^2 = \frac{\sin^2\psi_0}{\ell^2}\,.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

4 [2.5 puntos]. En este problema es necesario entregar los cálculos.
Sea el campo gravitatorio descrito por la métrica

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \qquad f(r) = 1 - \frac{a^2}{r^2},$$

donde $-\infty < t < \infty$, $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ y a es una constante con dimensiones de longitud. Dos observadores se encuentran en reposo en un punto $(0, r_0 > a, \pi/2, \phi_0)$. El primero de ellos se deja caer libremente.

(a) Calcular el tiempo que según él tarda en alcanzar $r = a$.

$$\boxed{r_0\sqrt{\frac{r_0^2}{a^2} - 1}}$$

(b) Calcular el tiempo que tarda el observador que se ha quedado en $r_0 \to \infty$ en ver llegar al primero a $r = a$.

$$\boxed{\infty \text{ (Nunca le va a ver llegar)}}$$

(a) El tiempo propio que mide el observador que cae es su tiempo propio τ. Recordemos que un observador en caída libre se mueve según una geodésica que, por la simetría esférica, está contenida en un plano con θ constante ($\theta = \pi/2$) y que las cantidades

$$E = f(r)\dot{t}\,, \quad L = r^2\dot{\phi}$$

se conservan sobre la geodésica. En términos de E y L, la condición $u^2 = -1$ se escribe

$$-f(r)\,\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2\dot{\phi}^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{r}^2 = E^2 - f(r)\left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right)$$

($\to$ 0.25). Los valores de las constantes E y L se determinan a partir de la condición inicial de reposo,

$$\dot{\phi}\big|_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 0\,, \quad \dot{r}\big|_0 = 0 \quad \overset{L=0}{\Rightarrow} \quad E^2 = f(r_0)$$

($\to$ 0.5). Sustituyendo en la ecuación para $\dot{r}$ se tiene

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = f(r_0) - f(r) = \frac{a^2(r_0^2 - r^2)}{r_0^2 r^2}\,. \tag{1}$$

Al tomar la raíz cuadrada nos quedamos con el signo negativo, pues r decrece según crece τ,

$$d\tau = -\frac{r_0}{a}\frac{r\,dr}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \tag{3}$$

($\rightarrow$ 0.25). Integrando entre $r(\tau = 0) = r_0$ y $r(\tau_a) = a$ obtenemos ($\rightarrow$ 0.25)

$$\tau_a = -\frac{r_0}{a} \int_{r_0}^{a} \frac{r\,dr}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} = \frac{r_0}{a} \sqrt{r_0^2 - r^2}\,\Big|_{r_0}^{a} = r_0 \sqrt{\frac{r_0^2}{a^2} - 1}\,.$$

(b) El tiempo que mide el observador que se ha quedado en reposo en r_0 es su tiempo propio. Llamémosle τ_0. Por estar en reposo, las componentes espaciales de su cuadrivelocidad son cero y su condición $u^2 = -1$ se reduce a

$$f(r_0)\left(\frac{dt}{d\tau_0}\right)^2 = 1$$

($\rightarrow$ 0.25). De aquí se sigue que

$$d\tau_0 = \sqrt{f(r_0)}\,dt = \sqrt{f(r_0)}\,\frac{dt}{d\tau}\,d\tau = \frac{f(r_0)}{f(r)}\,d\tau\,. \tag{3}$$

donde hemos usado que $\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{E}{f(r)}$ y que $E = \sqrt{f(r_0)}$ ($\rightarrow$ 0.5). Para $r_0 \rightarrow \infty$, se tiene

$$f(r_0 \rightarrow \infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ec. (1) toma la forma } \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{a^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad d\tau = -\frac{r\,dr}{a}\,.$$

Tras sustituir en la ec. (3) obtenemos

$$d\tilde{\tau} = -\frac{r^3\,dr}{a\,(r^2 - a^2)}$$

($\rightarrow$ 0.25). Si bien el lado derecho admite primitiva, dada por

$$-\frac{r^2}{2a} - \frac{a}{2}\ln\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right),$$

ésta no está definida en en los límites de integración $r = r_0 \rightarrow \infty$ y $r = a$. Así pues, el observador en reposo nunca ve al observador en caída libre llegar a $r = a$ ($\rightarrow$ 0.25)..

No pedido. Para r_0 finito, a partir de las ec. (3) y (2), obtenemos

$$d\tilde{\tau} = -\frac{r_0^2 - a^2}{r_0\,a}\,\frac{r^3 dr}{(r^2 - a^2)\sqrt{r_0^2 - r^2}}\,.$$

Nos fijamos en la región $r \rightarrow a^+$ y hacemos el cambio

$$r = a + \rho\,, \quad \rho > 0\,.$$

Desarrollando en serie de potencias de ρ se tiene

$$d\tilde{\tau} = -\frac{\sqrt{r_0^2 - a^2}}{2a^2 r_0}\,\frac{d\rho}{\rho}\,\big[1 + O(\rho)\big]\,.$$

La integral del lado derecho diverge para $\rho \rightarrow 0$, por lo que la conclusión es la misma.

5 [2.5 puntos]. En este problema es necesario entregar los cálculos.

Las ecuaciones de Einstein con un tensor energía-momento producido por un campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ son (en unidades gaussianas y $c = 1$)

$$R_{\mu\nu} = 2\, G_{\rm N} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} - g_{\mu\nu}\, \frac{1}{4}\, F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) .$$

Encontrar una solución estática con simetría eférica

$$ds^2 = -\, f(r)\, dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

si las únicas componentes de $F_{\mu\nu}$ distintas de cero son

$$F_{tr} = -F_{rt} = \frac{Q}{r^2} .$$

Para determinar las constantes de integración imponer que el campo se reduce al de Schwarzschild para $Q = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(r) = 1 - \dfrac{R_{\rm S}}{r} + \dfrac{G_{\rm N} Q^2}{r^2} \\ R_{\rm S} = \text{radio de Schwarzschild de la materia} \\ \qquad\quad \text{que produce el campo EM} \end{array}}$$

Llamemos

$$H_{\mu\nu} := F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

al tensor que aparece en el lado derecho de las ecuacines de Esintein. Usando la forma de la métrica y el dato para $F_{\mu\nu}$ se tiene

$$F_{\mu\alpha}\, F_{\nu}{}^{\alpha} = g^{tt} F_{\mu t} F_{\nu t} + g^{rr} F_{\mu r} F_{\nu r} = \begin{cases} -\dfrac{1}{f}\, \dfrac{Q^2}{r^4} & \text{si } \mu = \nu = r\,, \\[2ex] f\, \dfrac{Q^2}{r^4} & \text{si } \mu = \nu = t\,, \\[2ex] 0 & \text{en cualquier otro caso}\,, \end{cases}$$

$$F_{a\beta}\, F^{\alpha\beta} = 2\, F_{tr}\, F^{tr} = 2\, g^{tt} g^{rr} (F_{tr})^2 = -\, \frac{2Q^2}{r^4} .$$

Las únicas componentes no nulas de $H_{\mu\nu}$ son

$$H_{tt} = \frac{f Q^2}{2r^4}\,, \quad H_{rr} = -\frac{Q^2}{2 f r^4} = -\frac{1}{f^2}\, H_{tt}\,, \quad H_{\theta\theta} = \frac{Q^2}{2r^2}\,, \quad H_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, \frac{Q^2}{2r^2} = \sin^2\theta\; H_{\theta\theta} .$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Einstein y usando el dato que se da en el formulario para el tensor de Ricci de la métrica, llegamos a que las únicas ecuaciones no triviales son las correspondientes a las componentes

$$tt,\ rr: \qquad \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} = \frac{G_{\rm N} Q^2}{r^4}\,,$$

$$\theta\theta,\ \phi\phi: \qquad 1 - f - r f' = \frac{G_{\rm N} Q^2}{r^2}$$

($\rightarrow 1$). La primera de estas ecuaciones es la derivada con respecto a r de la segunda, por lo que basta resolver ésta última. Para ello la escribimos como

$$(rf)' = 1 - \frac{G_{\mathrm{N}} Q^2}{r^2}$$

e integramos sobre, obteniendo

$$f(r) = 1 - \frac{c_0}{r} + \frac{G_{\mathrm{N}} Q^2}{r^2}\,,$$

donde c_0 es una constrante de integración ($\rightarrow 1$). Par deteterminar c_0, imponemos el dato de que si $Q = 0$ el campo gravitatorio se reduce al de Schwarzschild, para el que recordemos se tiene

$$f(r)\Big|_{Q=0} = f_{\mathrm{S}}(r) = 1 - \frac{R_{\mathrm{S}}}{r}\,,$$

con R_{S} es el radio de Schwarzschild de la materia que produce el campo gravitatorio, que en nuestro caso produce también un campo EM ($\rightarrow 0.5$).

Comentario. Una carga estática Q tiene en coordenadas esféricas potencial $A_\mu = (Q/r, 0, 0, 0)$ y tensor $F_{\alpha\beta} = \partial_a A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ cuya única componente distinta de cero es $F_{rt} = \partial_r A_t = -Q/r^2$. El campo EM que produce dicha carga en su exteriore es, pues, el encontrado.