UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos			
Nombre		DNI	
Asignatura	**Relatividad general y gravitación**	Grupo	**A y A2**
Curso	**4º**	Fecha	

Relatividad general y gravitación
Examen convocatoria extraordinaria
28 de junio de 2019

(Tiempo disponible: **2 horas y 30 minutos**)

Problema 1 [4 puntos]. Señálense con una **V** las afirmaciones verdaderas y con una **F** las falsas. Cada respuesta incorrecta penaliza 0.25 puntos.

F El tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ satisface $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ si y sólo si la métrica $g_{\mu\nu}$ es solución de las ecuaciones de Einstein.

F Un campo vectorial de Killing genera una transformación de coordenadas que deja invariante la métrica sólo en un entorno de las geodésicas.

V Un campo vectorial de Killing genera una transformación de coordenadas que deja invariante la métrica en todo punto.

V Un espacio-tiempo es plano si y sólo si en todo punto x_0^μ del mismo es posible escoger un sistema local de coordenadas $\{x^\mu\}$ en el que $g_{\alpha\beta}(x)\big|_{x=x_0} = \eta_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}(x)\big|_{x=x_0} = 0$ y $\partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}(x)\big|_{x=x_0} = 0$.

V Una métrica es plana si y sólo si su tensor de Riemann es cero.

Un observador que se encuentra en caída libre en un campo gravitatorio deja caer a su vez un objeto.

V Si el campo gravitatorio es uniforme, el observador ve que el objeto permanece en reposo.

F Si el campo gravitatorio es uniforme, el observador ve que el objeto permanece en reposo durante unos instantes, transcurridos los cuales ve que éste se mueve.

V Si el campo gravitatorio es no uniforme, el observador ve que el objeto permanece en reposo durante unos instantes, transcurridos los cuales ve que éste se mueve.

Problema 2. Un campo gravitatorio está descrito por la métrica

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right), \qquad f(r) = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2,$$

$$-\infty < t < \infty, \quad r > m, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi\,,$$

donde m es una constante con dimensiones de longitud. En este problemas se estudian sus geodésicas de género tiempo y luz con $\boldsymbol{\theta = \pi/2}$.

(a) [**1 punto**] Identificar las coordenadas cíclicas y escribir las constantes de movimiento correspondientes.

Coordenada	Constante de movimiento
t	$E = f(r)\,\dot{t} = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 \dot{t}$
ϕ	$L = r^2\dot{\phi}$

El punto indica derivada con respecto al parámetro de la geodésica

(b) [**1 punto**] Obtener la ecuación geodésica para la coordenda r.

$$\ddot{r} + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^3 \frac{m}{r^2}\,\dot{t}^2 - \frac{m\,\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{m}{r}\right) r^2} - \left(1 - \frac{m}{r}\right) r\dot{\phi}^2 = 0\,.$$

(c) [**1 punto**] Obtener una ecuación diferencial de segundo orden para $u = 1/r$ como función de ϕ. Al igual que se hizo en clase para el caso de Schwarzschild, es conveniente escribir la condición de género de la geodésica como $\dot{x}^2 = k$, con $k = -1$ para género tiempo y $k = 0$ para género luz. En este apartado es necesario entregar los cálculos. Usar para ello las páginas al final del cuadernillo.

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + (1 - mu)\left(\frac{mk}{L^2} + u - 2mu^2\right) = 0\,.$$

(d) [**1 punto**] Probar que un fotón puede moverse siguiendo una órbita circular de radio $r = R = const$ y calcular R. En este apartado es necesario entregar los cálculos. Usar para ello las páginas al final del cuadernillo.

$R = 2m$

(e) [**1 punto**] Calcular el tiempo coordenado que tarda un fotón que se mueve según la órbita del apartado anterior en completar una vuelta. En caso de no haber resuelto el apartado anterior, dar el resultado en términos de R y m.

$t = 8\pi m$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos			
Nombre		DNI	
Asignatura	**Relatividad general y gravitación**	Grupo	**A y A2**
Curso	**4º**	Fecha	

Problema 3. Sea la métrica

$$ds^2 = -\,f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right),$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \le r < \infty \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi\,,$$

con a una constante con dimensiones de longitud y $f(r)$ es una función de r. ¡Ojo, nótese que no hay un factor r^2 que multiplica a los términos $d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2$!

(a) [**1 punto**] Calcular ${\Gamma^t}_{tr}$

$$\boxed{{\Gamma^t}_{tr} = \frac{f'}{2f}}$$

(b) [**3 puntos**] Se sabe que los únicos otros símbolos de Christoffel no nulos son

$${\Gamma^r}_{tt} = \frac{ff'}{2}, \qquad {\Gamma^r}_{rr} = -\frac{f'}{2f}, \qquad {\Gamma^\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\;cos\theta, \qquad {\Gamma^\phi}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,.$$

Se sabe también que las únicas componentes no nulas del tensor de Ricci son R_{tt}, R_{rr}, $R_{\theta\theta}$ y $R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta$. Calcularlas.

$$R_{tt} = \frac{1}{2}\,ff''$$

$$R_{rr} = -\frac{f''}{2f}$$

$$R_{\theta\theta} = 1$$

(c) [**1 punto**] Determinar la función $f(r)$ para que la métrica sea solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$. Determinar el valor de Λ. En este apartado es necesario entregar los cálculos. Usar para ello las páginas al final del cuadernillo.

$$f(r) = 1 - k_1\,\frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}\,, \quad k_1 = \text{constante integración}, \qquad \Lambda = \frac{1}{a^2}$$

Formulario

• Este formulario sigue para la signatura el convenio $(-,+,+,+)$, que es el adoptado en clase. Se tiene entonces:

$$\text{Christoffel}: \quad \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^{\rho}} \right)$$

$$\text{Riemann}: \quad R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta}$$

$$\text{Ricci}: \quad R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu}$$

$$\text{Geodésicas}: \quad \ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^{\alpha}\, \dot{x}^{\beta} = 0\,, \qquad \dot{x}^{\mu} := \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\,, \qquad \tau = \text{parámetro geodésica}$$

• Indentidades de Bianchi: $\nabla_{\mu} R_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} R_{\mu\nu} + \nabla_{\alpha} R^{\alpha}{}_{\nu\rho\mu} = 0$

• Métrica arbitratria estática con simetría esférica:

$$ds^2 = -f(r)\, dt^2 + h(r)\, dr^2 + r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,.$$

Símbolos de Christoffel distintos de cero:

$$\Gamma^{t}{}_{tr} = \frac{f'}{2f}$$

$$\Gamma^{r}{}_{tt} = \frac{f'}{2h}\,, \qquad \Gamma^{r}{}_{rr} = \frac{h'}{2h}\,, \qquad \Gamma^{r}{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{h}\,, \qquad \Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{h}\,,$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \frac{1}{r}\,, \qquad \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\, \cos\theta\,,$$

$$\Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \frac{1}{r}\,, \qquad \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,.$$

Componentes del tensor de Ricci distintas de cero:

$$R_{tt} = \frac{f''}{2h} + \frac{f'}{rh} - \frac{f'^2}{4fh} - \frac{f'h'}{4h^2}\,,$$

$$R_{rr} = -\frac{f''}{2f} + \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f'h'}{4fh} + \frac{h'}{rh}\,.$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{h} - \frac{rf'}{2fh} + \frac{rh'}{2h^2}\,.$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, R_{\theta\theta}\,.$$

Problema 2. Problema idéntico al de las geodésicas en un Schwarzschild. Lo único que cambia es al forma del coefficiente g_{tt}.

(b) Según la ayuda facilitada en el formulario para una métrica estática con simetría esférica, la ecuación geodésica para la coordenada r es

$$\ddot{r} + \Gamma^r{}_{tt}\,\dot{t}^2 + \Gamma^r{}_{rr}\,\dot{r}^2 + \Gamma^r{}_{\theta\theta}\,\dot{\theta}^2 + \Gamma^r{}_{\phi\phi}\,\dot{\phi}^2 = 0$$

Como $\theta = \pi/2$, se tiene $\dot{\theta} = 0$, por lo que el tercer término no contribuye. Para los otros, usando el formulario y

$$h = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad h' = -\,\frac{f'}{f^2}\,,$$

se tiene

$$\Gamma^r{}_{tt} = \frac{1}{2}\,f f'\,, \qquad \Gamma^r{}_{rr} = -\,\frac{f'}{2f}\,, \qquad \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -rf\,.$$

Queda entonces

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}\,f f'\,\dot{t}^2 - \frac{f'}{2f}\,\dot{r}^2 - rf\,\dot{\phi}^2 = 0\,. \tag{1}$$

Substituyendo

$$f(r) = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(r) = 2\left(1 - \frac{m}{r}\right)\frac{m}{r^2}$$

se obtiene

$$\ddot{r} + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^3 \frac{m}{r^2}\,\dot{t}^2 - \frac{m\,\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{m}{r}\right) r^2} - \left(1 - \frac{m}{r}\right) r\dot{\phi}^2 = 0\,.$$

(c) La condición $\dot{x}^2 = k$, para $\theta = \pi/2$, se escribe

$$-f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\,\dot{\phi}^2 = k = \begin{cases} -1 & \text{género tiempo} \\ 0 & \text{género luz} \end{cases}\,.$$

Utilizando [apartado (a)] que $\dot{t} = E/f$ y $\dot{\phi} = L/r^2$, y multiplicando por f se tiene

$$E^2 = \dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{r^2} - k\right) f(r)\,. \tag{2}$$

Se usa la regla de la cadena

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\,\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\,\frac{L}{r^2}$$

y se hace el cambio indicado

$$u = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr}\,\frac{dr}{d\phi} = -\,\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{d\phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = -\,\frac{du}{d\phi}\,L\,.$$

Tras substituir f por su expresión, la ec. (**??**) toma la forma

$$E^2 = L^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \left(L^2u^2 - k\right)(1 - mu)^2 .$$

Derivando con respecto a ϕ y simplificando una derivada $du/d\phi$ que multiplica a toda la ecuación resulta

$$0 = 2L^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2L^2u\,(1 - mu)^2 - 2m\left(L^2u^2 - k\right)(1 - mu) .$$

Así llegamos a

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + (1 - mu)\left(\frac{mk}{L^2} + u - 2mu^2\right) = 0 .$$

(d) Para una geodésica de tipo luz $k = 0$. Si r es constante, $\dot r = 0$ y entonces

$$\text{ec. (\textbf{??})}: \quad \frac{1}{2}\, f f' \,\dot t^2 - r f\, \dot\phi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f' E^2}{2f^2} - \frac{L^2}{r^3} = 0 .$$

$$\text{ec. (\textbf{??})}: \quad E^2 = \frac{L^2}{r^2} f .$$

De aquí se sigue que

$$r f' = 2f \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{m}{r}\right)\frac{m}{r} = \frac{m}{r} \quad \Rightarrow \quad r = 2m .$$

En las simplificacione estamos usando sistemáticamente que $r > m$, por lo que $f(r) > 0$.

Otra forma de resolver este apartado es notar que, para que $\dot r = 0$ sea compatible con que

$$E^2 = \dot r^2 + \frac{L^2}{r^2} f$$

permanezca constante, el término $V_{\text{ef}}(r) := f L^2/r^2$ debe alcanzar un extremo. Los extremos se alcanzan en

$$\frac{dV_{\text{ef}}(r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{r^3} f + \frac{f'}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad r f' = 2f .$$

(e) Es claro que

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{E}{f} \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{L}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\phi} = \frac{E r^2}{L\, f(r)} .$$

Para $r = R = const$ se tiene $E^2 = L^2 f(R)/R^2$ y, por tanto

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{R}{\sqrt{f(R)}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\pi R}{1 - \frac{m}{R}} = [R = 2m] = 8\pi m .$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos ....

Nombre .... DNI ....

Asignatura **Relatividad general y gravitación** Grupo **A y A2**

Curso 4º Fecha ....

Problema 3

(a)

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} t & r & \theta & \phi \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ r \\ \theta \\ \phi \end{array} & \begin{pmatrix} -f(r) & & & \\ & \frac{1}{f(r)} & & \\ & & a^2 & \\ & & & a^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \end{array} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f(r)} & & & \\ & f(r) & & \\ & & \frac{1}{a^2} & \\ & & & \frac{1}{a^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^t{}_{tr} = \frac{1}{2} g^{t\alpha}(\underbrace{\partial_t g_{\alpha r}}_{0} + \partial_r g_{t\alpha} - \partial_\alpha \underbrace{g_{tr}}_{0}) = \frac{1}{2} g^{tt}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{f}\right)(-f)' = \frac{f'}{2f}$$

(b) $$\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g} = \frac{1}{a^2\sin\theta}\partial_\mu(a^2\sin\theta) = \delta_\mu{}^\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -a^4\sin^2\theta$$

$$\sqrt{-g} = a^2\sin\theta$$

- $$R_{tt} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{tt} - \partial_t \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{t\alpha}}_{0} + \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{tt}}_{\Gamma^\alpha{}_{\alpha\theta}\underbrace{\Gamma^\theta{}_{tt}}_{0}} - \Gamma^\alpha{}_{t\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha t}$$

$$= \partial_r\left(\frac{ff'}{2}\right) - \left(\Gamma^r{}_{tt}\Gamma^t{}_{rt} + \Gamma^t{}_{tr}\Gamma^r{}_{tt}\right) = \cancel{\frac{1}{2}f'^2} + \frac{1}{2}ff'' - \cancel{2\frac{ff'}{2}\frac{f'}{2f}} = \frac{1}{2}ff''$$

- $R_{rr} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{rr} - \partial_r \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{r\alpha}}_{=0} + \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{rr}}_{= \Gamma^\alpha{}_{\alpha\theta} \underbrace{\Gamma^\theta{}_{rr}}_{=0}} - \Gamma^\alpha{}_{r\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha r}$

$$= \partial_r \left(-\frac{f'}{2f}\right) - \left(\Gamma^t{}_{rt}\Gamma^t{}_{tr} + \Gamma^r{}_{rr}\Gamma^r{}_{rr}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2f}f'' + \frac{f'^2}{2f^2} - \left[\left(\frac{f'}{2f}\right)^2 + \left(-\frac{f'}{2f}\right)^2\right] = -\frac{1}{2f}f''$$

- $R_{\theta\theta} = \partial_\alpha \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\theta\theta}}_{=0} - \partial_\theta \Gamma^\alpha{}_{\theta\alpha} + \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\theta\theta}}_{= \Gamma^\alpha{}_{\alpha\theta} \underbrace{\Gamma^\theta{}_{\theta\theta}}_{=0}} - \Gamma^\alpha{}_{\theta\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\theta}$

$$= -\partial_\theta \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\Gamma^\phi{}_{\theta\phi}$$

$$= 1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$$

(c) $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R - 2R + 4\Lambda = 0 \Rightarrow R = 4\Lambda$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} 4\Lambda + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Las componentes son

$R_{tt} = \Lambda g_{tt}$: $\frac{1}{2} f f'' = -\Lambda f$

$R_{rr} = \Lambda g_{rr}$: $-\frac{f''}{2f} = \Lambda \frac{1}{f}$

} Misma ecuación: $f'' = -2\Lambda$ $\Rightarrow$

$R_{\theta\theta} = \Lambda g_{\theta\theta}$: $1 = a^2 \Lambda \Rightarrow \Lambda = \frac{1}{a^2}$

constantes de integración

$$\Rightarrow f(r) = -\Lambda r^2 + \frac{a_1}{a} r + a_0^2 \Rightarrow f(r) = a_0^2 + a_1 \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}$$

En $r=0$ se tiene $f(r=0) = a_0^2$. Para que la métrica tenga signatura

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

$(-,+,+,+)$ en las proximidades de $r=0$, a_0^2 debe ser positiva. Por eso se ha escrito a_0^2. Entonces

$$f(r) = a_0^2 \left[1 + \frac{a_1}{a_0}\frac{r}{a_0 a} - \left(\frac{r}{a_0 a}\right)^2\right]$$

Redefiniendo

$$t_{nuevo} = |a_0| t \quad , \quad r_{nuevo} = \frac{r}{|a_0|}$$

se tiene

$$ds^2 = -f(r)\, dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + a^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)$$

$$f(r) = 1 + k_1 \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} \quad , \quad k_1 = \text{const. de integración.}$$