UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos			
Nombre		DNI	
Asignatura	**Relatividad general y gravitación**	Grupo	**A y A2**
Curso	**4º**	Fecha	

Relatividad general y gravitación
Examen final - 22 de enero de 2019

(Tiempo disponible: **3 horas**)

Problema 1 [1 punto].

El espacio-tiempo de Schwarzschild está dado por la métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right),$$

donde $-\infty < t < \infty$, $r > 2m$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

(a) Encontrar una ecuación diferencial para las trayectorias $t(r)$ de los rayos de luz que viajan con $\theta = \pi/2$ y $\phi =$const.

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Se sigue de imponer $ds^2 = 0$ (género luz), $d\theta = d\phi = 0$ y tomar raíces.

(b) Encontrar dichas trayectorias resolviendo la ecuación anterior.

$$t(r) = \pm\left[r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right)\right] + \text{const}$$

Basta integrar

$$t = \pm \int dr\, \frac{r - 2m + 2m}{r - 2m} = \pm \int dr\, \left(1 + \frac{1}{\dfrac{r}{2m} - 1}\right)$$

para obtener el resultado en la caja.

Ejercicio del parcial de diciembre.

Problema 2 [2.25 puntos].

Un satélite (partícula con masa) se mueve en un campo gravitatorio de Schwarzschild según una órbita circular con radio constante $r = R$ y $\theta = \pi/2$.

Ayuda. Se recuerda que las ecuaciones de las geodésicas para las coordenadas t y ϕ son

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = E\,, \qquad r^2\dot{\phi} = L\,,$$

y que, al tratarse de una partícula con masa, la condición de la capa de masas para el satélite es $g_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -1$. En estas expresiones el punto denota derivada con respecto al parámetro de la geodésica, la constante E es la energía por unidad de masa y la constante L es el momento angular por unidad de masa.

(a) Calcúlese el cuadrado L^2 en términos de m y R.

$$\boxed{L^2 = \frac{mR^2}{R - 3m}}$$

Del examen de Febrero de 2016. Resuelto en clase. Otra forma (equivalente) de resolverlo es usar la ecuación de la geodésica para la coordenada r, tal y como se hace a continuación. Vale cualquier solución correcta.

La ecuación geodésica para la coordenada θ se satisface trivialmente. Las ecuaciones geodésicas para t y ϕ son las dadas en la ayuda,

$$f(r)\,\dot{t} = E, \qquad r^2\dot{\phi} = L, \quad \text{donde} \quad f(r) := 1 - \frac{2m}{r}\,. \tag{1}$$

La ecuación para la coordenada r de las geodésicas puede obtenerse usando

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial r} = 0\,, \qquad L_{\text{ef}} = -f(r)\,\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right).$$

Ello da, tras tomar $\theta = \pi/2$,

$$\ddot{r} - \frac{f'}{2f}\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}f\,f'\dot{t}^2 - r\,f\,\dot{\phi}^2 = 0\,.$$

Particularizando para $r = R = const$ se tiene

$$\frac{1}{2}f'(R)\,\dot{t}^2 - R\,\dot{\phi}^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{m}{R^2}\,\dot{t}^2 - R\dot{\phi}^2 = 0 \;\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\; E^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right)^2\frac{L^2}{mR}\,. \tag{2}$$

A su vez, la condición $\dot{x}^2 = -1$ proporciona

$$f\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{f} - r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) = 1 \;\xrightarrow[\substack{\theta = \frac{\pi}{2}\\ r = R}]{(1)}\; E^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right)\left(1 + \frac{L^2}{R^2}\right). \tag{3}$$

De (2) y (3) se sigue

$$m\left(1 + \frac{L^2}{R^2}\right) = \left(1 - \frac{2m}{R}\right)\frac{L^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \text{resultado}$$

(b) Hállese el tiempo coordenado que tarda el satélite en completar una vuelta, es decir, el período de su órbita en tiempo coordenado. Expresar el resultado en términos de m y R.

$$\boxed{T_{\text{coordenado}} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{m}}}$$

Puede usarse la ec. (2):

$$\frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} = \frac{R^3}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\phi} = \sqrt{\frac{R^3}{m}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{coordenado}} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi}\, d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{m}}\,,$$

donde se ha tomado el signo positivo de la raíz cuadrada pues t aumenta con ϕ.

Si se ha calculado L^2 como se hizo clase, sin haber usado ecuación geodésica para r, se puede proceder de la siguiente forma. Las dos ecuaciones de la ayuda implican que

$$\frac{dt}{d\phi} = \frac{R^3 E}{(R-2m)L}\,.$$

Substituyendo en (3) el resultado para L^2 obtenido en el apartado (a), obtenemos

$$E^2 = \frac{(R-2m)^2}{R(R-3m)} \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{L} = \frac{(R-2m)\sqrt{R}}{mR^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\phi} = \frac{R\sqrt{R}}{m}\,.$$

(c) Obténgase el período que con su reloj mide un observador fijo en un punto de la órbita. Expresar el resultado en términos de m y R.

$$\boxed{T_{\text{obs. fijo}\,R} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{m} - 2}}$$

Un observador fijo en un punto de la órbita del satélite tiene $r = R$, $\theta = \pi/2$ y $\phi = const.$ Su lapso de tiempo propio $d\tau_{\text{obs. fijo}\,R}$ está por tanto dado por

$$d\tau^2_{\text{obs. fijo}\,R} = f(R)dt^2 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{obs. fijo}\,R} = \sqrt{1 - \frac{2m}{R}}\; T_{\text{coordenado}} \quad \Rightarrow \quad \text{resultado}\,.$$

Para la discusión de los apartados (b) y (c) en el caso de que la partícula que orbita sea un fotón ver la web de la asignatura.

Problema 3 [1 punto].

¿Cuántas componentes linealmente independientes tiene el tensor de Riemann en dos, tres, cuatro y cinco dimensiones?

Dimensión 2	Dimensión 3	Dimensión 4	Dimensión 5
1	3	20	50

Problema 4 [2.25 puntos].

Un campo gravitatorio está descrito en coordenadas $\{v, r, x, y\}$ por la métrica

$$ds^2 = -f(r)\,dv^2 + 2dvdr + \frac{r^2}{\ell^2}\left(dx^2 + dy^2\right),$$

donde ℓ es una constante con dimensiones de longitud y $f(r)$ es una función de r conocida.

(a) Calcúlense los símbolos de Christoffel $\Gamma^v{}_{vv}$ y $\Gamma^r{}_{vv}$.

$$\boxed{\Gamma^v{}_{vv} = \frac{1}{2}\,f' \qquad \Gamma^r{}_{vv} = \frac{1}{2}\,f f' \qquad \text{donde} \qquad f' := \frac{df}{dr}}$$

Del parcial de diciembre.

(b) Un observador tiene $r = r_0$, $x = x_0$ e $y = y_0$ constantes. Hállese su velocidad $u^\mu = \dot{x}^\mu$, donde $x^\mu(\tau)$ es la curva que sigue el observador en su movimiento.

$$\boxed{u^\mu = = \left(\frac{1}{\sqrt{f(r_0)}}\,,\,0\,,\,0\,,\,0\right) = \frac{1}{\sqrt{f(r_0)}}\,\delta^\mu{}_v}$$

Como el observador (partícula masiva) tiene r, x e y constantes, su cuadrivelocidad $u^\mu = \dot{x}^\mu$ satisface

$$-1 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -f(r_0)\left(u^v\right)^2 \;\Rightarrow\; u^v = \frac{1}{\sqrt{f(r_0)}}\,.$$

(c) Determínese el módulo $\sqrt{|a^2|}$ de su aceleración $a^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu$.

$$\boxed{\sqrt{|a^2|} = \frac{f'(r_0)}{2\sqrt{f(r_0)}}}$$

Basta operar:

$$a^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = u^v \nabla_v u^\mu = u^v\left(\partial_v u^\mu + \Gamma^\mu{}_{v\beta}u^\beta\right) = \Gamma^\mu{}_{vv}\left(u^v\right)^2 = \frac{\Gamma^\mu{}_{vv}}{f(r_0)}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\,\frac{f'(r_0)}{f(r_0)}\,,\,\frac{1}{2}f'(r_0)\,,\,0\,,\,0\right),$$

donde hemos usado que u^μ es ditinta de cero sólo para $\mu = v$ y que u^v no depende de v. Se sigue entonces que

$$a^2 = g_{\mu\nu}\,a^\mu a^\nu = g_{vv}\left(a^v\right)^2 + 2\,g_{vr}\,a^v a^r = \frac{1}{4}\,\frac{\left[f'(r_0)\right]^2}{f(r_0)} \quad\Rightarrow\quad \text{resultado}\,.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

Problema 5 [4.5 puntos]. En este problema es necesario entregar los cálculos.

Un campo gravitatorio está descrito por la métrica

$$ds^2 = f(r)\left(-dt^2 + dx^2 + dy^2\right) + \frac{\ell^2}{r^2}\,dr^2,$$

donde $0 < r < \infty$, $-\infty < t, x, y < \infty$ y $f(r)$ es una función por determinar. Sus símbolos de Christoffel (la prima indica derivada con respecto a r) son

$$\Gamma^t{}_{tr} = \frac{f'}{2f} \qquad \Gamma^x{}_{xr} = \frac{f'}{2f} \qquad \Gamma^y{}_{yr} = \frac{f'}{2f}$$
$$\Gamma^r{}_{tt} = \frac{r^2}{2\ell^2}\,f' \qquad \Gamma^r{}_{xx} = \Gamma^r{}_{yy} = -\frac{r^2}{2\ell^2}\,f' \qquad \Gamma^r{}_{rr} = -\frac{1}{r}\,.$$

(a) [**1 punto**] Demostrar sin hacer cálculos explícitos, mediante argumentos de simetría y la ley de transformación para tensores bajo cambios de coordenadas, que $R_{t\nu} = 0$ para $x^\nu = x, y, r$.

(b) [**1 punto**] Las únicas componentes del tensor de Ricci distintas de cero son $-R_{tt} = R_{xx} = R_{yy}$ y R_{rr}. Calcúlense.

$$-R_{tt} = R_{xx} = R_{yy} = -\left(\frac{r^2 f''}{2\ell^2} + \frac{r f'}{2\ell^2} + \frac{r^2 f'^2}{4\ell^2 f}\right)$$

$$R_{rr} = -\frac{3f''}{2f} - \frac{3f'}{2rf} + \frac{3f'^2}{4f^2}$$

(c) [**1 punto**] Determinar la función $f(r)$ para que la métrica sea solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0\,. \tag{4}$$

Determinar el signo de Λ.

$f(r) = \left(\frac{r}{\ell}\right)^a$ con $a = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}\Lambda\ell^2}$ signo$(\Lambda) = -$ $[\,\Lambda < 0\,]$

(d) [**1.5 puntos**] Encontrar coordenadas $\{\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{r}\}$ en términos de las cuales la métrica es conformemente plana. Escribir la métrica en las nuevas coordenadas. Usando la propiedad de covariancia de las ecuaciones de Einstein, determinar $\tilde{R}_{\tilde{r}\tilde{r}}$ a partir de ellas. Recuperar R_{rr} a partir de $\tilde{R}_{\tilde{r}\tilde{r}}$.

(a) La métrica es invariante bajo el cambio

$$t \to t' = -t, \quad x \to x' = x, \quad y \to y' = y, \quad r \to r' = r, \tag{5}$$

por lo que $R'_{\alpha'\beta'} = R_{\alpha\beta}$. En particular,

$$R'_{t'\beta} = R_{t\beta} \quad \text{para} \quad x^\beta = x, y, r\,. \tag{6}$$

Por otro lado, la ley de transformación de tensores bajo cambios arbitrarios de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu$ establece que

$$R'_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\,R_{\mu\nu}\,.$$

Aplicándola al cambio (5) se tiene que

$$R'_{t'\beta} = -R_{t\beta} \quad \text{para} \quad x^\beta = x, y, r\,. \tag{7}$$

De (6) y (7) se sigue que $R_{t\beta} = 0$ para $x^\beta = x, y, r$. (Hecho en clase).

(b) Puesto que $-R_{tt} = R_{xx} = R_{yy}$, basta con calcular una de ellas. Recordemos que

$$R_{\beta\nu} = \partial_\alpha\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}$$

Del resultado para los símbolos de Christoffel se sigue trivialmente que

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} = \delta_\mu{}^r\left(\frac{3f'}{2f} - \frac{1}{r}\right).$$

Esta expresión también puede obtenerse usando que $\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\sqrt{-g}$. Teniendo en cuenta este resultado y que los Christoffel sólo dependen de r, se sigue que

$$R_{\beta\nu} = \partial_r\,\Gamma^r{}_{\beta\nu} - \delta_\beta{}^r\,\delta_\nu{}^r\left(\frac{3f'}{2f} - \frac{1}{r}\right)' + \left(\frac{3f'}{2f} - \frac{1}{r}\right)\Gamma^r{}_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} \tag{8}$$

Particularizando para $\beta = \nu = t$ se tiene

$$R_{tt} = \left(\frac{r^2}{2\ell^2}\,f'\right)' + \left(\frac{3f'}{2f} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{r^2}{2\ell^2}\,f'\right) - 2\,\underbrace{\Gamma^t{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{tt}}_{\frac{f'}{2f}\,\frac{r^2 f'}{2\ell^2}} = \frac{r^2 f''}{2\ell^2} + \frac{r f'}{2\ell^2} + \frac{r^2 f'^2}{4\ell^2 f}\,.$$

Para $\beta = \nu = x$ resulta

$$R_{xx} = \left(-\frac{r^2}{2\ell^2}\,f'\right)' + \left(\frac{3f'}{2f} - \frac{1}{r}\right)\left(-\frac{r^2}{2\ell^2}\,f'\right) - 2\,\underbrace{\Gamma^x{}_{xr}\,\Gamma^r{}_{xx}}_{-\frac{f'}{2f}\,\frac{r^2 f'}{2\ell^2}} = -R_{tt}\,.$$

El caso $\beta = \nu = y$ es trivial, pues todos los Christoffel son invariantes bajo $x \leftrightarrow y$.

La ec. (8) implica para $\beta = \nu = r$ que

$$R_{rr} = \left(-\frac{1}{r}\right)' - \left(\frac{3f'}{2f} - \frac{1}{r}\right)' + \left(\frac{3f'}{2f} - \frac{1}{r}\right)\left(-\frac{1}{r}\right) - \underbrace{\left(\Gamma^t{}_{rt}\,\Gamma^t{}_{tr} + \Gamma^x{}_{rx}\,\Gamma^x{}_{xr} + \Gamma^y{}_{ry}\,\Gamma^y{}_{yr} + \Gamma^r{}_{rr}\,\Gamma^r{}_{rr}\right)}_{\frac{3f'^2}{4f^2} + \frac{1}{r^2}},$$

o, lo que es lo mismo,

$$R_{rr} = -\frac{3f''}{2f} - \frac{3f'}{2rf} + \frac{3f'^2}{4f^2}\,.$$

(c) Contrayendo (4) con $g^{\mu\nu}$ se obtiene $R = 4\Lambda$, que substituida en (4) permite escribir ésta última como $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Como $-R_{tt} = R_{xx} = R_{yy}$ y $-g_{tt} = g_{xx} = g_{yy}$, sólo hay dos ecuaciones distintas:

$$R_{tt} = \Lambda g_{tt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r^2 f''}{2\ell^2} + \frac{r f'}{2\ell^2} + \frac{r^2 f'^2}{4\ell^2 f} = -\Lambda f\,, \tag{9}$$

$$R_{rr} = \Lambda g_{rr} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3f''}{2f} - \frac{3f'}{2rf} + \frac{3f'^2}{4f^2} = \Lambda \frac{\ell^2}{r^2}\,. \tag{10}$$

De aquí se sigue que

$$\frac{3}{f}\,(9) + \frac{r^2}{\ell^2}\,(10) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3r^2}{2\ell^2}\,\frac{f'^2}{f^2} = -2\Lambda\,. \tag{11}$$

Como el lado izquierdo es positivo, el lado derecho tiene que serlo. Esto fija el signo de Λ como negativo. La ecuación (11) tiene **dos soluciones distintas**,

$$f_\pm(r) = c_+\left(\frac{r}{\ell}\right)^a,\ c_-\left(\frac{r}{\ell}\right)^{-a}, \qquad c_\pm = \text{constantes de integración}, \qquad a = \sqrt{-\frac{4}{3}\Lambda\ell^2}\,.$$

Nótese que **la combinación lineal de ambas, $c_+\, r^a + c_-\, r^{-a}$, no es solución**. La constante de integración $c_\pm$ en ambos casos hay que tomarla como positiva pues queremos que f lo sea. En caso contrario f sería negativa y tendríamos una métrica con dos direcciones de tipo tiempo y dos de tipo espacio. Cambiando la escala de r mediante $r \to (c_\pm)^{\pm 1/a}\, r$ podemos tomar $c_\pm = 1$. Así pues, escribimos

$$f(r) = \left(\frac{r}{\ell}\right)^a \qquad a = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}\Lambda\ell^2}\,.$$

Es trivial comprobar que estas f's satisfacen las dos ecuaciones (9) y (10).

(d) La métrica puede escribirse

$$ds^2 = f(r)\left(-\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + \frac{\ell^2}{r^2 f(r)}\,dr^2\right).$$

Hacemos el cambio

$$t \to \tilde{t} = t, \quad x \to \tilde{x} = x, \quad y \to \tilde{y} = y, \quad r \to \tilde{r}(r)\,, \tag{12}$$

con $\tilde{r}(r)$ cualquier solución de

$$d\tilde{r} = \frac{\ell\, dr}{r\sqrt{f(r)}} = \left(\frac{\ell}{r}\right)^{1+\frac{a}{2}} dr \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\tilde{r}}{dr} = \left(\frac{\ell}{r}\right)^{1+\frac{a}{2}}. \tag{13}$$

En las nuevas coordenadas la métrica es conformemente plana, pues

$$ds^2 = f(\tilde{r})\left(-d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{r}^2\right).$$

Como solución de (13) tomamos (constante de integración igual a cero)

$$\frac{\tilde{r}}{\ell} = -\frac{2}{a}\left(\frac{\ell}{r}\right)^{a/2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r}{\ell} = \left(-\frac{2}{a}\frac{\ell}{\tilde{r}}\right)^{2/a},$$

lo que a su vez implica que

$$f(\tilde{r}) = \left(\frac{r}{\ell}\right)^{a} = \frac{4\ell^2}{a^2\tilde{r}^2} = -\frac{3}{\Lambda\tilde{r}^2} \qquad (\Lambda < 0)\,. \tag{14}$$

La covariancia de las ecuaciones de Einstein (toman la misma forma en todos los sistemas de referencia) implica que $\tilde{R}_{\tilde{r}\tilde{r}} = \Lambda\tilde{g}_{\tilde{r}\tilde{r}}$, es decir

$$\tilde{R}_{\tilde{r}\tilde{r}} = \Lambda f(\tilde{r})\,.$$

Para recuperar R_{rr} usamos que, bajo el cambio (12),

$$R_{rr} = \left(\frac{d\tilde{r}}{dr}\right)^2 \tilde{R}_{\tilde{r}\tilde{r}} = \left(\frac{d\tilde{r}}{dr}\right)^2 \Lambda f(\tilde{r}) = [\text{eq. (13)}] = \Lambda\,\frac{\ell^2}{r^2}\,,$$

como ya sabemos.