UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

| | |
|---|---|
| Apellidos ............ | |
| Nombre ............ | DNI ............ |
| Asignatura **Relatividad general y gravitación** | Grupo **A y A2** |
| Curso **4º** | Fecha ............ |

# Relatividad general y gravitación
# Examen convocatoria extraordinaria
# 9 de septiembre de 2020

(Tiempo disponible: **2 horas**)

**Problema 1 [3 puntos].**

Señalar con una **V** las afirmaciones verdaderas y con una **F** las falsas. Cada respuesta incorrecta penaliza 0.25 puntos.

- **V** En cualquier punto de un espacio-tiempo es posible escoger un sistema de referencia en el que los efectos de la gravedad son inobservables en ese punto.
- **F** Si los símbolos de Christoffel se anulan en un sistema de referencia entonces se anulan en todos los sistemas de referencia.
- **V** El conmmutador de dos vectores de Killing es un vector Killing.
- **V** Un espacio-tiempo de dimensión tres es plano si y sólo si el tensor de Ricci de su métrica es cero.
- **V** Para que el tensor de Riemann sea cero basta comprobar que lo es en un sitema de coordenadas particular.
- **V** Un observador en caída libre se mueve según una geodésica de género tiempo.

**Problema 2 [1.5 puntos].**

Encontrar la transformación $\delta v^\mu = \bar{v}^\mu(x) - v^\mu(x)$ de un vector $v^\mu(x)$ bajo el cambio de coordenadas $x^\mu \to \bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\,\xi^\mu(x)$ generado por el campo $\xi^\mu$.

$$\boxed{\delta v^\mu = \boldsymbol{\epsilon\left[v^\alpha(x)\,\partial_\alpha\xi^\mu(x) - \xi^\alpha(x)\,\partial_\alpha v^\mu(x)\,\right] + O(\epsilon^2)}}$$

Por definición de vector,

$$\bar{v}^\mu(\bar{x}) = \frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\,v^\alpha(x)\,.$$

Usando

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\,\xi^\mu(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta^\mu_\alpha + \epsilon\,\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\alpha}\,,$$

se tiene

$$\bar{v}^\mu(\bar{x}) = v^\mu(x) + \epsilon\left[\partial_\mu\xi^\alpha(x)\right]v^\alpha(x) \tag{A}$$

Por otro lado,

$$\bar{v}^\mu(\bar{x}) = \bar{v}^\mu\big(x + \epsilon\,\xi(x)\big) = [\text{Taylor}] = \bar{v}^\mu(x) + \epsilon\,\xi^\alpha(x)\,\partial_\alpha\bar{v}^\mu(x)\,.$$

El término $\epsilon\,\xi^\alpha(x)\,\partial_\alpha\bar{v}^\mu(x)$ es ya de orden 1 en $\epsilon$. Como $\bar{v}^\mu(x) = v^\mu(x) + O(\epsilon)$, se tiene entonces

$$\bar{v}^\mu(\bar{x}) = \bar{v}^\mu(x) + \epsilon\,\xi^\alpha(x)\,\partial_\alpha\omega_\mu(x) + O(\epsilon^2)\,. \tag{B}$$

Igualando (A) y (B) se llega a

$$v^\mu(x) + \epsilon\,v^\alpha(x)\,\partial_\alpha\xi^\mu(x) = \bar{v}^\mu(x) + \epsilon\,\xi^\alpha(x)\,\partial_\alpha v^\mu(x) + O(\epsilon^2) \quad\Rightarrow\quad \text{resultado en la caja}\,.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

| | | |
|---|---|---|
| Apellidos ............ | | |
| Nombre ............ | DNI ............ | |
| Asignatura **Relatividad general y gravitación** | Grupo **A y A2** | |
| Curso **4º** | Fecha ............ | |

**Problema 3 [1.5 puntos].**

Un campo gravitatorio está dado por la métrica

$$ds^2 = -\frac{r^2}{a^2}\,dt^2 + \frac{a^2}{r^2}\,dr^2 + a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right),$$

$$-\infty < t < \infty, \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\,,$$

donde $a$ es una constante con dimensiones de longitud. Encontrar las trayectorias de los rayos de luz que viajan radialmente, es decir con $\theta$ y $\phi$ constantes. Encontrar una coordenada $u$ que permanezca constante a lo largo de dichas trayectorias. Escribir la métrica en términos de $u, r, \theta$ y $\phi$.

Los rayos de luz radiales siguen curvas con $ds^2 = 0$ y $d\theta = d\phi = 0$. Se tiene entonces

$$\text{curvas radiales género luz:} \quad 0 = -\frac{r^2}{a^2}\,dt^2 + \frac{a^2}{r^2}\,dr^2 \quad \Rightarrow \quad dt = \pm\frac{a^2}{r^2}\,dr\,. \tag{C}$$

Integrando

$$\boxed{\text{Rayos de luz radiales:} \qquad t = \mp\frac{a^2}{r} + k\,, \qquad k = \text{constante arbitraria}}$$

Para cada valor de $k$ se tiene un rayo de luz radial distinto.

La coordenada

$$\boxed{u_\pm = t \pm \frac{a^2}{r}}$$

permanece constante sobre las trayectorias de los rayos de luz radiales, pues

$$du_\pm = dt \mp \frac{a^2}{r^2}\,dr = \left[\text{eq. (C)}\right] = 0\,.$$

De la definición de $u_\pm$ se sigue

$$dt = du_\pm \pm \frac{a^2}{r^2}\,dr \quad \Rightarrow \quad ds^2 = -\frac{r^2}{a^2}\left(du_\pm \pm \frac{a^2}{r^2}\,dr\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}\,dr^2 + a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right).$$

Es decir,

$$\boxed{ds^2 = -\frac{r^2}{a^2}\,du_\pm^2 \mp 2du_\pm\,dr + a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)}$$

**Problema 4 [4.5 puntos].**

Un campo gravitatorio está descrito en coordenadas $\{v, r, x, y\}$ por la métrica

$$ds^2 = -f(r)\, dv^2 + 2dvdr + \frac{r^2}{\ell^2}\left(dx^2 + dy^2\right),$$

con $\ell$ una constante con dimensiones de longitud y $f(r)$ una función de $r$ conocida.

**(a)** Calcular los símbolos de Christoffel $\Gamma^v{}_{vv}$ y $\Gamma^r{}_{vv}$.

**(b)** Un observador se mueve con $r = r_0$, $x = x_0$ e $y = y_0$ constantes. Hallar su velocidad $u^\mu = \dot{x}^\mu$, donde $x^\mu(\tau)$ es la curva que sigue en su movimiento.

**(c)** Encontrar los vectores de Killing de la métrica dada y las cantidades conservadas asociadas sobre las geodésicas. Hay tres inmediatos y un cuarto algo menos.

**(d)** Las únicas componentes del tensor de Ricci distintas de cero son

$$R_{vv} = \frac{1}{2}\, f\left(f'' + \frac{2f'}{r}\right), \quad R_{vr} = -\frac{1}{f}\, R_{vv}\,, \quad R_{ij} = -\frac{1}{\ell^2}\left(f + rf'\right)\delta_{ij}\,.$$

Calcular la función $f$ para que la métrica dada sea solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica $\Lambda$.

**(a)** En el convenio $x^\mu = (v, r, x, y)$, la métrica y su inversa son

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2/\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2/\ell^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^2/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell^2/r^2 \end{pmatrix}.$$

De estas ecuaciones y de la expresión de los Christoffel

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^\rho}\right)$$

se sigue que

$$\Gamma^v{}_{vv} = \frac{1}{2}\, g^{v\alpha}\left(\partial_v g_{\alpha v} + \partial_v g_{v\alpha} - \partial_\alpha g_{vv}\right) = \frac{1}{2}\, g^{vr}\left(2\,\partial_v g_{rv} - \partial_r g_{vv}\right) = \frac{1}{2}\, f'\,,$$

$$\begin{aligned}\Gamma^r{}_{vv} &= \frac{1}{2}\, g^{r\alpha}\left(\partial_v g_{\alpha v} + \partial_v g_{v\alpha} - \partial_\alpha g_{vv}\right) \\ &= \frac{1}{2}\, g^{rv}\left(2\,\partial_v g_{vv} - \partial_v g_{vv}\right) + \frac{1}{2}\, g^{rr}\left(2\,\partial_v g_{rv} - \partial_r g_{vv}\right) = \frac{1}{2}\, f f'\,,\end{aligned}$$

donde la prima indica derivada con respecto a $r$. Así pues,

$$\boxed{\Gamma^v{}_{vv} = \frac{1}{2}\, f' \qquad\qquad \Gamma^r{}_{vv} = \frac{1}{2}\, f f'}$$

**(b)** Como un observador tiene masa, se mueve según una curva de género tiempo. Su velocidad satisface, por tanto, $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu = -1$. Para el observador del enunciado, $r$, $x$ e $y$ son constantes, de forma que $\dot{r} = \dot{x} = \dot{y} = 0$. Se tiene entonces

$$g_{vv}\dot{v}^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad f\dot{v}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{f(r_0)}}\,,$$

donde la $f$ la hemos tomado en $r_0$, pues es el valor de la coordenada $r$ en la que se encuentra el observador. Juntando todo,

$$\boxed{u^\mu = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{f(r_0)}}\,,\,0\,,\,0\,,\,0\right)}$$

**(c)** La coordenadas $v$, $x$ e $y$ son cíclicas, puesto que ninguno de los coeficientes de la métrica depende de ellas. Por tanto, los campos vectoriales $\partial_v$, $\partial_x$ y $\partial_y$ son de Killing.

Para $v$ y $r$ contantes ($dv = dr = 0$), la métrica se reduce a $\frac{r_0^2}{\ell^2}(dx^2 + dy^2)$, que es proporcional a la métrica euclídea en el plano $xy$ y permanece invariante bajo rotaciones en torno a su origen $(x, y) = (0, 0)$. Estas rotaciones están generadas por el vector $\xi = x\partial_y - y\partial_x$, por lo que $\xi$ es Killing.

La cantidad conservada que define un vector de Killing $\xi^\mu$ de una métrica $g_{\mu\nu}(x)$ sobre una geodésica $x^\mu(\tau)$ es

$$Q_\xi = g_{\mu\nu}\,\xi^\mu\dot{x}^\nu\,. \tag{D}$$

En el caso de que $z$ sea un coordenada cíclica, la cantidad conservada $Q_{\partial_z}$ generada por el Killing $\xi = \partial_z$ puede escribirse

$$Q_{\partial_z} = \frac{\partial}{\partial\dot{z}}\left(\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\right). \tag{E}$$

Usando la ec. (D) [ó la (E) para los tres primeros Killing] se obtiene las siguientes cantidades conservadas:

| Vector | Cantidad conservada |
|---|---|
| $\xi = \partial_v \;\Leftrightarrow\; \xi^\mu = (1,0,0,0)$ | $Q_\xi = -f(r)\,\dot{v} + \dot{r}$ |
| $\xi = \partial_x \;\Leftrightarrow\; \xi^\mu = (0,0,1,0)$ | $Q_\xi = \frac{r^2}{\ell^2}\,\dot{x}$ |
| $\xi = \partial_y \;\Leftrightarrow\; \xi^\mu = (0,0,0,1)$ | $Q_\xi = \frac{r^2}{\ell^2}\,\dot{y}$ |
| $\xi = x\partial_y - y\partial_x \;\Leftrightarrow\; \xi^\mu = (0,0,-y,x)$ | $Q_\xi = \frac{r^2}{\ell^2}\big(-y\dot{x} + x\dot{y}\big)$ |

**(d)** Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{E}$$

Contrayendo con $g^{\mu\nu}$ se tiene $R = 4\Lambda$, que sustituida en la ecs. (E) proporciona $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Usando el dato para $R_{\mu\nu}$ so llega a las dos siguientes ecuaciones:

$$\text{componentes } vv \text{ y } vr\text{:} \quad \frac{1}{2}\left(f'' + \frac{2f'}{r}\right) = -\Lambda \tag{F}$$

$$\text{componentes } xx \text{ e } yy\text{:} \quad -\big(f + r f'\big) = \Lambda\, r^2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{r^2}\,(rf)' = \Lambda \tag{G}$$

La primera de ellas es la derivada de la segunda. Así pues, basta con resolver la ecuación diferencial (G). Ésta tiene como solución

$$-rf = \frac{1}{3}\Lambda r^3 + a_0$$

con $a_0$ una constante de integración. Es decir,

$$\boxed{f(r) = -\frac{a_0}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2}$$