Relatividad general y gravitación - Soluciones
Examen final - 15 de febrero de 2016

Para aprobar la asignatura es necesario **(1)** obtener en la parte de mínimos una calificación de 4 o superior, **y (2)** obtener una calificación total superior a 5.

Los alumnos que obtuvieron una nota superior a 4 en el examen del 26 de enero están exentos de realizar la parte de mínimos.

En las preguntas 7 y 8 es neceserario entregar los cálculos. Úsese para ellos las hojas adicionales de la carpetilla.

Datos

- Para signatura $(-,+,+,+)$ se tiene:

$$\text{Christoffel}: \ \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^{\rho}} \right)$$

$$\text{Riemann}: \ R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta}$$

$$\text{Ricci}: \ R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu}$$

$$\text{Geodésicas}: \ \ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^{\alpha}\, \dot{x}^{\beta} = 0 \qquad \dot{x}^{\mu} := \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\,, \qquad \tau = \text{parámetro afín}$$

Parte de mínimos

1 [**1 punto**] ¿Cuántas componentes independientes tiene el tensor de Riemann en cuatro dimensiones?

20

2 [**1 punto**] Complétese el siguiente enunciado del principio de equivalencia débil para las leyes de la Física:

En cada punto del espacio-tiempo en un campo gravitatorio arbitrario es posible escoger un sistema de referencia ... **inercial local (llamado en caída libre) tal que en un entorno suyo suficientemente pequeño las leyes de la Física toman la misma forma que en un sistema de referencia inercial no acelerado en ausencia de gravedad.**

Se pide el principio para las leyes de la físicas. Las partes subrayadas son fundamentales.

3 [**1 punto**] Una partícula con masa se mueve en un campo gravitatorio descrito en coordenadas locales (t, x, y, z) por la métrica

$$ds^2 = -e^{-2ax/c^2} c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \,.$$

Se sabe que $dx/dt = dy/dt = dz/dt = 0$ en $t = 0$. Calcúlese $dx^2/d\tau^2$ en $t = 0$.

$$\boxed{\left.\frac{d^2x}{d\tau^2}\right|_{t=0} = \boldsymbol{a}}$$

Mismo problema que en el examen del 26.01.2016. Recordemos que las ecuaciones de las geodésicas se obtienen como

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial x^\mu} = 0\,, \quad \text{punto} = \frac{d}{d\tau}\,, \quad \tau = \text{parámetro afín}, \tag{1}$$

con $L_{\rm ef}$ la lagrangiana efectiva. En nuestro caso

$$L_{\rm ef} = g_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu = -e^{-2ax/c^2} c^2 \dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\,,$$

por lo que las ecs. (1) toman la forma

$$2c^2 e^{-2ax/c^2}\,\dot{t} = const_1, \qquad \ddot{x} - a\,e^{-2ax/c^2}\,\dot{t}^2 = 0\,, \qquad \dot{y} = const_2, \qquad \dot{z} = const_3. \tag{2}$$

A su vez, la condición de la capa de masas $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -c^2$ es

$$-e^{-2ax/c^2} c^2\,\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = -c^2\,. \tag{3}$$

De las condiciones iniciales se sigue que

$$\dot{x}\Big|_{t=0} = \left.\frac{dx}{dt}\,\dot{t}\,\right|_{t=0} = 0\,, \qquad \text{análogamente:} \quad \dot{y}\Big|_{t=0} = \dot{z}\Big|_{t=0} = 0\,.$$

La ec. (3) implica entonces que $e^{-2ax/c^2}\dot{t}^2\big|_{t=0} = 1$, y la segunda ecuación de (2) conduce al resultado.

4 [**1 punto**] Calcúlese el símbolo de Christoffel Γ^t_{xx} de la métrica $(c = 1)$

$$ds^2 = -\big[dt + f(x)\,dx\big]^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\,,$$

donde $f(x)$ es una función arbitraria de la coordenada x.

$$\boxed{\Gamma^t_{xx} = \frac{\boldsymbol{df(x)}}{\boldsymbol{dx}}}$$

Cálculos en la ec. (4) del problema 7.

5 [1 punto] Escríbanse cuatro vectores de Killing de la métrica ($c = 1$)

$$ds^2 = \frac{1}{z}\,(-dt^2 + dx^2 + dy^2) + z\,dz^2\,, \qquad x, y, x \in \mathbf{R}, \quad z \in \mathbf{R}_+\,.$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \xi_1 = \dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} & \xi_2 = \dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} & \xi_3 = \dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} \\ \xi_4 = \boldsymbol{x}\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} - \boldsymbol{y}\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} & \xi_5 = \boldsymbol{t}\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} + \boldsymbol{x}\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} & \xi_6 = \boldsymbol{t}\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} + \boldsymbol{y}\dfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} \end{array}}$$

Los tres primeros son triviales, pues las coordenadas t, x e y son cíclicas. En cuanto a los otros basta notar que, en una sección $z = z_0 = const$, la métrica $z_0^{-1}(-dt^2 + dx^2 + dy^2)$ es la de Minkowski en tres dimensiones, por lo que sus isometrías son las mismas. ξ_4 no cambia z y genera rotaciones en el plano xy, y ξ_5 y ξ_6 no cambian z y generan respectivamente boosts en las direcciones de x e y.

Parte de mejora

6 [1 punto]. Una partícula con masa se mueve en un espacio-tiempo de Schwarzschild

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\,, \quad f = 1 - \frac{2m}{r}\,.$$

La partícula sigue una órbita $r = R = const$, $\theta = \pi/2$. Calcúlese su momento angular por unidad de masa L.

$$\boxed{L = \boldsymbol{R}\sqrt{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{R - 3m}}}}$$

Hecho en clase. Se substituye $f\dot{t} = E$, $\theta = \pi/2$ y $r^2\dot{\phi} = L$ en $\dot{x}^2 = -1$. Tras derivar con respecto a τ y simplificar una $\dot{r}$, se obtiene

$$E^2 = \dot{r}^2 + f\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{r} + \frac{2m}{r^2}\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{2L^2}{r^3} = 0\,.$$

Para $r = R = const$, se tiene

$$m\left(1 + \frac{L^2}{R^2}\right) - \left(1 - \frac{2m}{R}\right)\frac{L^2}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{resultado}$$

7 [1.5 puntos]. Considérese un espacio-tiempo descrito en coordenadas locales (t, x, y, z) por la métrica ($c = 1$)

$$ds^2 = -\big[dt + f(x)\,dx\big]^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\,,$$

con $f(x)$ función de x. Discútase si se trata de un espacio-tiempo plano. ¿Existen coordenadas en las que la métrica toma la forma de Minkowski.

Primera forma. Mismo procedimiento que para el problema 42 hecho en clase. Para que sea un espacio-tiempo plano, el tensor de Riemann, no el de Ricci, debe ser cero. Comprobémoslo. La métrica

$$ds^2 = -dt^2 - 2f\,dt\,dx + (1-f^2)\,dx^2 + dy^2 + dz^2$$

en notación matricial convencional es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & -f & 0 & 0 \\ -f & 1-f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1+f^2 & -f & 0 & 0 \\ -f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos los Christoffel. Usando

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^\rho}\right)$$

se tiene

- $\Gamma^y{}_{\nu\lambda} = 0$, pues $g^{y\rho} \neq 0$ requiere $\rho = y$ y $\partial_y g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha g_{y\beta} = 0$ para todo α y β.
- Análogamente, $\Gamma^z{}_{\nu\lambda} = 0$.
- Argumentos similares para t y x implican que $\Gamma^t{}_{\nu\lambda}$ y $\Gamma^x{}_{\nu\lambda}$ sólo podrán ser disitintos de cero para $\{\nu,\lambda\}$ en el rango $\{t,x\}$. Empecemos por $\Gamma^t{}_{\nu\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^t{}_{tt} &= \frac{1}{2}\,g^{t\rho}\,(\partial_t g_{\rho t} + \partial_t g_{t\rho} - \partial_\rho g_{tt}) = 0\,, \\
\Gamma^t{}_{tx} &= \frac{1}{2}\,g^{t\rho}\,(\partial_t g_{\rho x} + \partial_x g_{t\rho} - \partial_\rho g_{tx}) = \frac{1}{2}\,g^{tx}\,(\partial_x g_{tx} - \partial_x g_{tx}) = 0\,, \\
\Gamma^t{}_{xx} &= \frac{1}{2}\,g^{tt}\,(\partial_x g_{tx} + \partial_x g_{xt} - \partial_t g_{xx}) + \frac{1}{2}\,g^{tx}\,(\partial_x g_{xx} + \partial_x g_{xx} - \partial_x g_{xx}) \\
&= \frac{1}{2}\,(-1+f^2)\,(-2f') + \frac{1}{2}\,(-f)\,(1-f^2)' = f', \qquad (4)
\end{aligned}$$

donde la prima indica derivada con respecto a x. Pasemos a $\Gamma^x{}_{\nu\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^x{}_{tt} &= \frac{1}{2}\,g^{x\rho}\,(\partial_t g_{\rho t} + \partial_t g_{t\rho} - \partial_\rho g_{tt}) = 0\,, \\
\Gamma^x{}_{tx} &= \frac{1}{2}\,g^{x\rho}\,(\partial_t g_{\rho x} + \partial_x g_{t\rho} - \partial_\rho g_{tx}) = \frac{1}{2}\,g^{xx}\,(\partial_x g_{tx} - \partial_x g_{tx}) = 0\,, \\
\Gamma^x{}_{xx} &= \frac{1}{2}\,g^{xt}\,(\partial_x g_{tx} + \partial_x g_{xt} - \partial_t g_{xx}) + \frac{1}{2}\,g^{xx}\,(\partial_x g_{xx} + \partial_x g_{xx} - \partial_x g_{xx}) \\
&= \frac{1}{2}\,(-f)\,(-2f') + \frac{1}{2}\,(1)\,(1-f^2)' = 0\,.
\end{aligned}$$

En resumen, el único Christoffel distinto de cero es

$$\boldsymbol{\Gamma^t{}_{xx} = f'(x)}.$$

Se sigue que $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta}=0$, pues $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma}\neq 0$ requiere $\alpha=t$ y $\mu=\sigma=x$, pero y $\Gamma^{\sigma=x}{}_{\nu\beta}=0$. A su vez, $\partial_\mu\,\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}$ no nulo necesita $\alpha=t$ y $\mu=\beta=\nu=x$, que corresponde a R^{t}_{xxx}, que es cero por las simetrías del tensor de Riemann. Así pues,

$$\boldsymbol{R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}=0}\,.$$

Esto implica que la métrica es plana para toda f. Por tanto, existen coordendas en las que toma la forma de Minkowski.

Nota. Si se determina $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ a partir de las ecuaciones de las geodésicas, los cálculos son como siguen. Las geodésicas que resultan de usar (1) con

$$L_{\text{ef}}=g_{\mu\nu}\,\dot{x}^{\mu}\,\dot{x}^{\nu}=-\,\dot{t}^{2}-2f\dot{t}\dot{x}+(1-f^{2})\,\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\dot{z}^{2}$$

son

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\big(-\,2\,\dot{t}-2f\dot{x}\big)=0 \quad&\Rightarrow\quad \ddot{t}+f\,\ddot{x}+f'\dot{x}^{2}=0\,,\\
\frac{d}{d\tau}\big[-\,2f\dot{t}+2\,(1-f^{2})\,\dot{x}\,\big]-\big(2\,f'\dot{t}\,\dot{x}-2ff'\dot{x}^{2}\big)=0 \quad&\Rightarrow\quad f\ddot{t}-(1-f^{2})\,\ddot{x}+ff'\dot{x}^{2}=0\,,\\
\frac{d}{d\tau}\,\dot{y}=0 \quad&\Rightarrow\quad \ddot{y}=0\,,\\
\frac{d}{d\tau}\,\dot{z}=0 \quad&\Rightarrow\quad \ddot{z}=0\,.
\end{aligned}$$

Mutiplicando la primera por f y restándole la segunda se obtiene $\ddot{x}=0$, con lo que la primera se reduce a $\ddot{t}+f'\dot{x}^{2}=0$. Es decir,

$$\ddot{t}+f'\dot{x}^{2}=0\,,\quad \ddot{x}=0\,,\quad \ddot{y}=0\,,\quad \ddot{z}=0\,.$$

De aquí se leen los Christoffel escritos arriba.

Segunda forma. Introdúzcase una nueva coordenada temporal T,

$$t=T+g(x)\quad\Rightarrow\quad dt=dT+g'(x)\,dx\,,$$

donde $g(x)$ es una función de x a determinar. Entonces

$$-\,dt^{2}-2f\,dt\,dx+(1-f^{2})\,dx^{2}=-\,dT^{2}-2\,(f+g')\,dT\,dx+\big[1-f^{2}-2f\,g'-(g')^{2}\,\big]\,dx^{2}.$$

Es claro que, tomando

$$f+g'=0\quad\Rightarrow\quad g(x)=-\int_{x}d\tilde{x}\;f(\tilde{x})\quad\Rightarrow\quad t=T-\int_{x}d\tilde{x}\;f(\tilde{x})\,,$$

la métrica adopta la forma de Minkowski

$$ds^{2}=-\,dT^{2}+dx^{2}+dy^{2}+dz^{2}\,,$$

que prueba su carácter plano.

Este mismo razonamiento se usó en clase para eliminar los términos $dt\,dr$ en una métrica estática con simetría esférica. Aquí x juega el papel de r.

Para obtener la máxima puntuación bastaba con resolver el problema de una forma.

8 [2.5 puntos]. Considérese una métrica dada por

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a}\, dx^2 + t^{2b} dy^2 + t^{2c} dz^2\,,$$

con a, b, c reales. Calcúlense las condiciones que deben satisfacer a, b y c para que sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. ¿Existen soluciones para a, b y c enteros?

Notación. Usaremos $x^i = (x, y, z)$ con $i = 1, 2, 3$ y $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$.
Ojo: ¡a_i no es un 3-vector! Para evitar confusiones, las sumas sobre i las escribiremos explícitamente.

Primero se calculan los Christoffel. De

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & t^{2a} & & \\ & & t^{2b} & \\ & & & t^{2c} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & t^{-2a} & & \\ & & t^{-2b} & \\ & & & t^{-2c} \end{pmatrix}$$

se sigue que

$$\Gamma^t{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-1)\left(\partial_\alpha\, g_{t\beta} + \partial_\beta\, g_{\alpha t} - \partial_t\, g_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}\,\partial_t\, g_{\alpha\beta}\,,$$

$$\Gamma^i{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} g^{ij}\left(\partial_\alpha\, g_{j\beta} + \partial_\beta\, g_{\alpha j} - \partial_j\, g_{\alpha\beta}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} g^{ij}\left(\partial_\alpha\, g_{j\beta} + \partial_\beta\, g_{\alpha j}\right).$$

Los únicos Christoffel distintos de cero son, por tanto,

$$\Gamma^t{}_{ii} = a_i\, t^{2a_i - 1}\,, \qquad \Gamma^i{}_{ti} = \frac{a_i}{t}\,. \tag{5}$$

Nota. Para aquellos que prefieran obtener los Christoffel a partir de las ecuaciones de las geodésicas, la lagrangiana efectiva es

$$L_{\text{ef}} = -\,\dot{t}^2 + t^{2a}\,\dot{x}^2 + t^{2b}\dot{y}^2 + t^{2c}\dot{z}^2\,,$$

y ésta da lugar a las geodésicas

$$\begin{aligned} \ddot{t} + a\, t^{2a-1}\,\dot{x}^2 + b\, t^{2b-1}\,\dot{x}^2 + c\, t^{2c-1}\,\dot{x}^2 &= 0\,, \\ \ddot{x} + \frac{2a}{t}\,\dot{t}\,\dot{x} &= 0\,, \\ \ddot{y} + \frac{2b}{t}\,\dot{t}\,\dot{y} &= 0\,, \\ \ddot{z}^i + \frac{2c}{t}\,\dot{t}\,\dot{z} &= 0\,. \end{aligned}$$

De aquís se leen las expresiones (5).
A continuación se calcula el tensor de Ricci

$$R_{\beta\nu} = \partial_\alpha\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\,\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\,.$$

Invariancia de la métrica bajo $x^1 \to -x^1$ y las propiedades de transformación del tensor de Ricci bajo este cambio implican que la única componente $R_{1\nu}$ distinta de cero es R_{11}. Lo mismo ocurre para $R_{2\nu}$ y $R_{3\nu}$. Así pues, las únicas componentes en principio no nulas del Ricci son R_{tt} y R_{ii}. Calculémoslas. Usando el resultado para ${\Gamma^\mu}_{\nu\lambda}$ y

$$
{\Gamma^\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\nu \sqrt{-g} = \frac{1}{t}\,(a_1 + a_2 + a_3)\,\delta_\nu^{\ t}\,,
$$

se tiene

$$
R_{tt} = 0 - \,\partial_t\left[\,\frac{1}{t}\,(a_1+a_2+a_3)\,\right] + 0 - \frac{1}{t^2}\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2) = \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{3}\left(a_j - a_j^2\right),
$$

$$
R_{ii} = \partial_t\left(a_i\,t^{2a_i-1}\right) - 0 + \frac{1}{t}\,(a_1+a_2+a_3)\,a_i\,t^{2a_i-1} - 2\,a_i\,t^{2a_i-1}\,\frac{a_i}{t} = t^{2(a_i-1)}\,a_i\left(\sum_{j=1}^{3} a_j - 1\right).
$$

Las ecuaciones de Einstein en vacío $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,R = 0$ puede escribirse $R_{\mu\nu} = 0$. En nuestro caso éstas se reducen a

$$
\sum_{j=1}^{3} a_j^2 - \sum_{j=1}^{3} a_j = 0\,, \tag{6}
$$

$$
a_i\left(\sum_{j=1}^{3} a_j - 1\right) = 0\,, \qquad i = 1,2,3. \tag{7}
$$

Distinguimos dos posibilidades

1) $\sum_{j=1}^{3} a_j \neq 1$, en cuyo caso las tres ecuaciones en (7) implican

$$
\text{Solución 1}: \;\; a_1 = 0\,,\;\; a_2 = 0\,,\;\; a_3 = 0\,.
$$

2) $\sum_{j=1}^{3} a_j = 1$. Etonces la ec. (6) implica una de las siguientes tres soluciones:

$$
\begin{aligned}
&\text{Solución 2}: \;\; a_1 = 1\,,\;\; a_2 = 0\,,\;\; a_3 = 0\,,\\
&\text{Solución 3}: \;\; a_1 = 0\,,\;\; a_2 = 1\,,\;\; a_3 = 0\,,\\
&\text{Solución 4}: \;\; a_1 = 0\,,\;\; a_2 = 0\,,\;\; a_3 = 1\,.
\end{aligned}
$$