



Relatividad general y gravitación
Examen final - 9 de septiembre de 2016

Nombre: Soluciones Firma: _____

Tiempo disponible: **3 horas**.

En los **problemas 1 a 4 no entregue sus cálculos**. En los **problemas 5 y 6 entregue sus operaciones**.

Fórmulas de utilidad

Para signatura $(-, +, +, +)$ se tiene:

$$\text{Christoffel : } \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^{\rho}} \right)$$

$$\text{Riemann : } R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}$$

$$\text{Ricci : } R_{\beta\nu} = R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu}$$

$$\text{Geodésicas : } \ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} = 0 \quad \dot{x}^{\mu} := \frac{dx^{\mu}}{d\tau}, \quad \tau = \text{parámetro afín}$$

Sean $g_{\mu\nu}(x)$ y $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ dos métricas en dimensión cuatro tales que $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \bar{g}_{\mu\nu}$, con $\Omega(x)$ función de las coordenadas. Sus tensores de Ricci están relacionados mediante la expresión

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - 2 \bar{\nabla}_{\mu} \bar{\nabla}_{\nu}(\ln \Omega) + 2 \bar{\nabla}_{\mu}(\ln \Omega) \bar{\nabla}_{\nu}(\ln \Omega) - \bar{g}_{\mu\nu} \bar{\nabla}^2(\ln \Omega) - 2 \bar{g}_{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{\nabla}_{\alpha}(\ln \Omega) \bar{\nabla}_{\beta}(\ln \Omega),$$

donde $\bar{\nabla}_{\mu}$ es la derivada covariante de $\bar{g}_{\mu\nu}$.

1 [1 punto] ¿Cuántas componentes independientes tienen los tensores de Riemann, Ricci y métrico en **tres** dimensiones?

Riemann: **6** Ricci: **6** Métrico: **6**

¿Cuánto vale el tesor de Weyl en **tres** dimensiones?

Weyl $^{\lambda}_{\mu\nu\lambda\rho} = \mathbf{0}$

2 [1 punto] Escribanse cuatro vectores de Killing para la métrica

$$ds^2 = e^{2A^2(\rho)} (-dt^2 + dz^2) + d\rho^2 + \rho^2 e^{2B^2(\rho)} d\theta^2, \quad 0 < \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

con $A(\rho)$ y $B(\rho)$ funciones de ρ .

$$\xi_1 = \partial_t$$

$$\xi_2 = \partial_z$$

$$\xi_3 = \partial_\theta$$

$$\xi_4 = z\partial_t + t\partial_z$$

3 [1 punto] Señálense cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

- En cualquier punto de un espacio-tiempo es posible escoger un sistema de referencia en el que los efectos de la gravedad son inobservables en ese punto.
- Si los símbolos de Christoffel se anulan en un sistema de referencia entonces se anulan en todos los sistemas de referencia.
- La condición necesaria y suficiente para que un espacio-tiempo sea plano es que el tensor de Ricci se anule.
- Un espacio-tiempo bidimensional es plano si y sólo si su escalar de Ricci es cero.

4 [1 punto]. Considérense dos observadores en reposo en un campo gravitatorio dado por

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

donde ℓ es una constante con dimensiones de longitud. El primero se encuentra en $r_1 = a$, $\theta_1 = \pi/2$, $\phi_1 = 0$; y el segundo en $r_2 = b$, $\theta_2 = \pi/2$, $\phi_2 = 0$, con $b < a \ll \ell$. El primero emite luz que viaja con $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$ y ésta es observada por el segundo. Calcúlese el desplazamiento que observa este último e indíquese si es hacia el infrarrojo o hacia el ultravioleta.

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{a^2 - b^2}{2\ell^2}$$

Desplazamiento hacia el ultravioleta

Si ν_1 y ν_2 denotan las frecuencias observadas, el cociente entre las mismas es

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{tt}(\mathbf{x}_1)}{g_{tt}(\mathbf{x}_2)}} = \left(1 + \frac{r_1^2}{\ell^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{r_2^2}{\ell^2}\right)^{-1/2}$$

Desarrollando en serie de potencias de r_2^2/ℓ^2 y r_1^2/ℓ^2 ,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\ell^2} + \dots$$

Como $r_1 > r_2$ se tiene que $\nu_2 > \nu_1$, por lo que la frecuencia observada por 2 es mayor que la observada por 1. Es decir, hay desplazamiento hacia el ultravioleta y

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{2\ell^2}.$$

5 [3 puntos]. Determinése la función $f(z)$ para que

$$ds^2 = f^2(z) (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

sea solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (1)$$

Determinése el signo de Λ .

$$f(z) = \left(c_0 \pm z \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}} \right)^{-1}, \quad c_0 = \text{const integración}, \quad \Lambda < 0$$

Escriba sus operaciones y razonamientos en el espacio que sigue.

La métrica dada, llamémosla $g_{\mu\nu}$, es de la forma

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}.$$

con $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski. Este es un caso particular de transformación conforme, con $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y $\Omega = f$. Usando el formulario de la primera página y teniendo en cuenta que para $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ se tiene $\bar{\nabla}_\mu = \partial_\mu$ y $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$, resulta

$$R_{\mu\nu} = -2 \partial_\mu \partial_\nu (\ln f) + 2 \partial_\mu (\ln f) \partial_\nu (\ln f) - \eta_{\mu\nu} \partial^2 (\ln f) - 2 \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\ln f) \partial_\beta (\ln f).$$

Como f sólo depende de z ,

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\ln f) &= \delta_\nu^z \frac{f'}{f} \\ \partial_\mu \partial_\nu (\ln f) &= \delta_\mu^z \delta_\nu^z \left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} \right), \\ \partial^2 (\ln f) &= \frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2}, \\ \partial_\mu (\ln f) \partial_\nu (\ln f) &= \delta_\mu^z \delta_\nu^z \frac{f'^2}{f^2}, \\ \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\ln f) \partial_\beta (\ln f) &= \frac{f'^2}{f^2}, \end{aligned}$$

donde la prima denota derivada con respecto a z . Esto implica que

$$R_{\mu\nu} = 2 \delta_\mu^z \delta_\nu^z \left(-\frac{f''}{f} + 2 \frac{f'^2}{f^2} \right) - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} \right).$$

En componentes

$$R_{tt} = -R_{xx} = -R_{yy} = \frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2}, \quad R_{zz} = 3 \left(-\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} \right).$$

Las ecuaciones de Einstein (1) pueden escribirse en cuatro dimensiones como

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} .$$

Sus componentes son

$$(tt), (xx), (yy) : \quad \frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} = -\Lambda f^2 , \quad (2)$$

$$(zz) : \quad -\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} = \frac{1}{3} \Lambda f^2 . \quad (3)$$

Sumando (2) y (3),

$$\left(\frac{f'}{f^2}\right)^2 = -\frac{\Lambda}{3} . \quad (4)$$

Para que f y f' sean reales, la constante cosmológica debe ser negativa. En este caso, la integral de (4) es

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow f(z) = \left(c_0 \pm z \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}\right)^{-1}, \quad c_0 = \text{const. de integración} \quad (5)$$

Nótese que (2) y (3) son dos ecuaciones diferenciales distintas para la misma f , por lo que hay que comprobar que son compatibles. Substituyendo (4) en cualquiera de ellas se llega a

$$\frac{f''}{f^3} = -\frac{2\Lambda}{3} .$$

Es trivial comprobar que la f obtenida satisface esta ecuación para toda c_0 . Así pues (2) y (3) son compatibles y la métrica dada resuelve las ecuaciones de Einstein para f en (5).

El problema también puede resolverse calculando los Christoffel y partir de estos el tensor de Ricci. De esta forma es algo más largo, pero no mucho más, pues la forma diagonal de la métrica y el hecho de que las únicas derivadas distintas de cero son con respecto a z simplifica considerablemente los cálculos.

6 [3 puntos] Considérese el espacio-tiempo bidimensional

$$ds^2 = \frac{a^2}{x^2} (-dt^2 + dx^2), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad a = \text{const.}$$

(a) Demuéstrese que las ecuaciones de las geodésicas son

$$\dot{t} = kx^2 \Leftrightarrow \ddot{t} - \frac{2}{x} \dot{t}\dot{x} = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{x} (\dot{t}^2 + \dot{x}^2) = 0, \quad (7)$$

donde el punto indica derivada con respecto a un parámetro afín y k es una constante (cantidad conservada). Ecuéntrense a partir de ellas los símbolos de Christoffel.

(b) Demuéstrese que las geodésicas están dadas por

$$x^2 - (t - t_0)^2 = \pm R^2,$$

donde t_0 y R son constantes reales. Ayuda: escribir la ec. (II) como

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} = 2 \quad (8)$$

e integrar esta última.

(c) Tómesese $t_0 = 0$, calcúlese $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ y discútase el género de las geodésicas atendiendo al valor de R .

Nota. El problema está enunciado de forma que la solución a ninguno de sus apartados depende de que se hayan resuelto los otros.

Escriba sus respuestas en el espacio que sigue.

(a) The geodesic equations can be obtained from the Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial x^\mu} = 0, \quad L_{\text{ef}} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{a^2}{x^2} (-\dot{t}^2 + \dot{x}^2).$$

Noting that

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial \dot{t}} &= -\frac{2a^2 \dot{t}}{x^2} & \frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial \dot{x}} &= \frac{2a^2 \dot{x}}{x^2} & \frac{\partial L_{\text{ef}}}{\partial x} &= -\frac{2a^2}{x^3} (-\dot{t}^2 + \dot{x}^2), \end{aligned}$$

we produce eqs. (6)-(7) above. The Christoffel symbols are read from the geodesic equations as

$$\Gamma^t_{tx} = \Gamma^x_{tt} = \Gamma^x_{xx} = -\frac{1}{x}.$$

(b) Using the chain rule we write

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \dot{t}, \quad (9)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{dt} \dot{t} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \dot{t}^2 + \frac{dx}{dt} \ddot{t}. \quad (10)$$

Substitution of eq. (9) in eq. (6) gives

$$\ddot{t} - \frac{2t^2}{x} \frac{dx}{dt} = 0, \quad (11)$$

With this, eq. (10) can be recast as

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} t^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{2t^2}{x}. \quad (12)$$

Using now eqs. (12) and (9) in eq. (7), we obtain

$$t^2 \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{x} \right] = 0.$$

Hence

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) = 1 \Leftrightarrow \text{eq. (8)}.$$

Integrating eq. (8) twice over t , we have

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{dt} &= 2(t - t_0), \\ x^2 &= (t - t_0)^2 \pm R^2, \end{aligned} \quad (13)$$

with t_0 and R^2 integration constants.

(c) Setting $t_0 = 0$ and differentiating eq. (13) with respect to t we have $dx/dt = t/x$. The square of the tangent vector \dot{x}^μ to a geodesic is

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{a^2}{x^2} \left[-\dot{t}^2 + \dot{x}^2 \right] = \frac{a^2 t^2}{x^2} \left[-1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right] = \frac{a^2 t^2}{x^2} \left[-1 + \frac{t^2}{x^2} \right] = \mp \frac{a^2 t^2}{x^4} R^2 = \mp a^2 k^2 R^2,$$

where k is the constant in (6). **Timelike/spacelike geodesics have $R \neq 0$ and correspond to taking the negative/positive sign in the equation above, whereas null geodesics have $R = 0$.**