UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

Relatividad general y gravitación
Examen convocatoria ordinaria
10 de enero de 2020

(Tiempo disponible: **2 horas y 30 minutos**)

Problema 1 [2.5 puntos]. Señalar con una **V** las afirmaciones verdaderas y con una **F** las falsas. Cada respuesta incorrecta penaliza 0.25 puntos.

V El género del vector tangente a una geodésica es constante sobre la misma.

F Si las componentes $g_{\mu\nu}(x)$ de una métrica en un sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$ no dependen de una coordenada dada, llamémosla u, entonces el campo vectorial $\xi = \partial_u$ es de Killing si y sólo si es de género tiempo.

Un observador en caída libre en un campo gravitatorio deja caer a su vez un objeto y observa que se aleja. Puede afirmarse que

F Es siempre posible escoger un sistema de referencia (es decir, de coordenadas) en el que el objeto no se mueva con respecto al observador.

V El objeto se mueve según una geodésica de género tiempo distinta de la que sigue el observador.

V El tensor de Riemann de la métrica que describe el campo gravitatorio es distinto de cero.

Problema 2 [1 punto]. Completar el enunciado del principio de equivalencia de Einstein en cualquiera de sus formas

En un campo gravitatorio arbitrario es siempre posible escoger en todo punto del espacio-tiempo un sistema de ... coordenadas **local** (llamado en caída libre) en el que las leyes de la Física toman la misma forma que en un sistema de referencia inercial (no acelerado) en ausencia de gravedad. (También puede decirse que) ... la misma forma que en relatividad especial. (También vale) ... referencia tal que para tiempos muy pequeños y a distancias muy pequeñas las leyes de la Física toman la misma forma que ...

Problema 3 [1.5 puntos]. En coordenadas $\{v, r, \theta, \phi\}$, un campo gravitorio está descrito por la métrica

$$ds^2 = -f(r)\,dv^2 + 2\,dv\,dr + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right),$$

donde

$$-\infty < v < \infty, \quad r > 0, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi$$

y $f(r)$ es una función conocida. Encontrar dos vectores de Killing, determinar su género y encontrar las cantidades conservadas que generan sobre las geodésicas.

$\xi_1 = \partial_v$	$\xi_2 = \partial_\phi$
género: tiempo, luz, espacio si $f(r) > 0, = 0, < 0$	género: espacio
Cant. conservada: $-f(r)\,\dot{v} + \dot{r}$	Cant. conservada: $r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

Problema 3 [1 punto]. Dada la métrica (unidades $c = 1$)

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2Ht}\big(dx^2 + dy^2 + dz^2\big)\,, \qquad t, x, y, z \in \mathbb{R}\,,$$

donde H es un parámetro con dimensiones de (longitud)$^{-1}$, encontrar sus símbolos de Christoffel $\Gamma^t{}_{xx}$ y $\Gamma^x{}_{ty}$.

$\Gamma^t{}_{xx} =$	$\Gamma^t{}_{xy} =$

Problema 5 [2.5 puntos]. Dada la métrica del problema anterior,

(a) encontrar las componentes no nulas de su tensor de Ricci.

(b) Encontrar la relación que debe haber entre H y la constante cosmológica Λ para que la métrica satisfaga las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

(c) Demostrar que para cualquier geodésica de género tiempo con vector tangente u^μ el tensor energía-impulso de un campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\left[g^{\alpha\beta}\,(\partial_\alpha\phi)\,(\partial_\beta\phi) + V(\phi)\right],$$

donde $V(\phi) \geq 0$ es un potencial conocido, satisface $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$. **En este apartado es necesario entregar los cálculos. Úsese para ello el espacio que sigue.**

Problema 6 [1.5 puntos]. Considérese el campo gravitatorio descrito por la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1+m^2r^2} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\,,$$

con m un parámetro con dimensiones de masa. Discutir si existen geodésicas de género luz cerradas y, de existir, determinar su forma. **En este ejercicio hay que entregar los cálculos. Úsese para ello las hojas que siguen.**

Problema 4

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad H = \text{const} \in \mathbb{R}$$

Christoffel: $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}(\partial_\nu g_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\lambda})$

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & j \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ i \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & \\ & e^{-2Ht}\delta_{ij} \end{pmatrix} \end{array} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & e^{2Ht}\delta^{ij} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^0{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(-1)(\underbrace{\partial_\nu g_{0\lambda}}_{=0} + \underbrace{\partial_\lambda g_{\nu 0}}_{=0} - \partial_0 g_{\nu\lambda}) = \frac{1}{2}\delta_\nu{}^i \delta_\lambda{}^i \partial_0 e^{-2Ht}$$

requires $\lambda = 0$, but $\partial_\nu g_{00} = 0$ requires $\nu = \lambda = i$ $(= x, y, z)$

$$\boxed{\Gamma^0{}_{ij} = -He^{-2Ht}\delta_{ij}}$$

$g_{\nu\lambda}$ does not depend on x^k

$$\Gamma^i{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} e^{2Ht}\delta^{ik}(\partial_\nu g_{k\lambda} + \partial_\lambda g_{\nu k} - \underbrace{\partial_k g_{\nu\lambda}}_{=0})$$

requires $\lambda = k$, $\nu = 0$: $\partial_0 g_{kk} = -2He^{-2Ht}$

$$\boxed{\Gamma^i{}_{0j} = \Gamma^i{}_{j0} = -H\delta^i{}_j}$$

(2x 0.5 = 1 punto)

Problema 5

$$ds^2 = -dt + e^{-2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad H = \text{const} \in \mathbb{R}$$

The metric is invariant under $x \to -x$. It follows that the only component $\neq 0$ of $R_{\mu\nu}$ with a subindex x is R_{xx}. Invariance of the metric under $y \to -y$, respectively $z \to -z$, implies that the only component $\neq 0$ $R_{\mu\nu}$ with a subindex y, respectively z, is R_{yy}, respectively R_{zz}. Hence only $R_{xx}, R_{yy}, R_{zz}, R_{tt}$ may be different from zero. Invariance of the metric under $x \leftrightarrow y$ and $x \leftrightarrow z$ implies that $R_{xx} = R_{yy}$ and $R_{xx} = R_{zz}$. This leaves us with R_{tt}, $R_{xx} = R_{yy} = R_{zz}$. Let us compute them:

$$R_{\beta\nu} = \underbrace{\partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}}_{= \partial_0 \Gamma^0{}_{\beta\nu}} - \underbrace{\partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha}}_{= 0} + \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\alpha\sigma}}_{= -3H\delta_\sigma{}^0} \Gamma^\sigma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta \sqrt{-g} = \frac{1}{e^{-3Ht}} \partial_\beta e^{-3Ht} = -3H\delta_\beta{}^0 \Rightarrow \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} = 0$$

In particular

- $R_{00} = \underbrace{\partial_0 \Gamma^0{}_{00}}_{= 0} - 3H \underbrace{\Gamma^0{}_{00}}_{= 0} - \Gamma^\alpha{}_{0\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha 0} = -\Gamma^j{}_{0i}\Gamma^i{}_{j0} = -H^2 \underbrace{\delta^j{}_i \delta^i{}_j}_{3} = -3H^2$

- $R_{11} = \partial_0 \Gamma^0{}_{11} - 3H\Gamma^0{}_{11} - \Gamma^\alpha{}_{1\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha 1} = \partial_t(-He^{-2Ht}) - 3H(-He^{-2Ht}) - 2H^2 e^{-2Ht}$
$= 3H^2 e^{-2Ht}$

$\Gamma^\alpha{}_{1\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha 1} = \Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{01} + \Gamma^1{}_{10}\Gamma^0{}_{11} = 2\Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{01} = 2H^2 e^{-2Ht}$

$R_{tt} = -3H^2$	$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = 3H^2 e^{-2Ht}$

apartado (a)
(0.25×4 = 1 punto)

The Einstein equations with cosmological constant are

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \iff R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

(tt) component $\quad -3H^2 = -\Lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda = 3H^2}$

(ii) component $\quad 3H^2 e^{-2Ht} = \Lambda e^{-2Ht} \quad \Rightarrow \Lambda = 3H^2$ $\Big|$ Consistent

apartado (b) 0.5 puntos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \, \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \Rightarrow$$

$$u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = u^2 = -1$$

By assumption

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (u^\mu \partial_\mu \phi)(u^\nu \partial_\nu \phi) + \frac{1}{2} \left[g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \, \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]$$

Recall that given a timelike vector u^μ, any vector A^μ can be uniquely written as

$$A^\mu = \alpha u^\mu + S^\mu$$

where α is real and S^μ is spacelike, $S^2 > 0$ and $Su = 0$

Using this for $A^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ one has

$$u^\mu \partial_\mu \phi = g^{\mu\nu} u^\mu \partial_\nu \phi = \alpha u^2 = -\alpha$$

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi = \alpha^2 u^2 + S^2 = -\alpha^2 + S^2$$

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = (-\alpha)^2 + \frac{1}{2} \left[-\alpha^2 + S^2 + V(\phi) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\alpha^2 + S^2 + V(\phi) \right]$$

$=$ sum of three positive quantities

> 0

apartado (c) 1 punto

An alternative proof is the following. $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ is a scalar, so it takes the same value in all reference frames. To compute it, use a free falling frame. In this frame one locally has $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ and $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}=0$. There are infinitely many such frames, all of them related through Lorentz transformations. This is so since in free falling frames the laws of physics are those of special relativity [Einstein's equivalence principle] and special relativity is Lorentz invariant. If in the chosen frame u^μ, which is timelike, has the form $u^\mu=(1,\vec{0})$, one is done. If not, perform a Lorentz transformation to another free falling frame in which $u^\mu=(1,\vec{0})$. In this way, one ends up in a frame in which $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}=0$ and $u^\mu=(1,\vec{0})$. Computing $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ in such a frame gives

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \underbrace{(u^\mu\partial_\mu\phi)^2}_{(-\partial_0\phi)^2} + \frac{1}{2}\left[\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\,\partial_\beta\phi + V(\phi)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2 + (\vec{\partial}\phi)^2 + V(\phi)\right] \geq 0$$

Problema 6

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1+m^2r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad f(r) = 1+m^2r^2$$

$$[m] = 1 \ (\text{mass})$$

Geodesics are contained in a plane, which we take it to be $\theta = \frac{\pi}{2}$. They have

$$E = \dot{t}\ , \ L = r^2\dot{\phi} \quad \text{conserved quantities} \qquad (1)$$

$\dot{x}^2 = 0$ (we are restricting ourselves to light like geodesics)

It follows that

$$-\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1+m^2r^2} + r^2\dot{\phi}^2 = 0 \implies \dot{r}^2 = \left(E^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)(1+m^2r^2) \qquad (2)$$

Using that $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{L}{r^2}$ we have

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4} = \left(E^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)(1+m^2r^2)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^2(\mu^2r^2-1)(1+m^2r^2) \qquad \text{where} \quad \mu^2 = \frac{E^2}{L^2}$$

$$dr = \pm r\sqrt{(\mu^2r^2-1)(1+m^2r^2)}\, d\phi$$

The double sign $\pm$ can be set to $+$ by choosing an orientation for ϕ.

Make now

$$u = \frac{1}{r} \implies du = -\frac{dr}{r^2} = -u^2 dr$$

This gives

Hasta aquí todo es como para Schwarzschild

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{u^2}-1\right)\left(1+\frac{m^2}{u^2}\right)}\, d\phi \qquad (3)$$

$$d\phi = -\frac{u\, du}{\sqrt{(\mu^2-u^2)(m^2+u^2)}}$$

$$\phi - \phi_0 = -\int \frac{u\, du}{\sqrt{(\mu^2-u^2)(m^2+u^2)}}\ , \quad \phi_0 = \text{integration constant}.$$

To integrate over u make $u \to v$ with $u^2 = v + A$ and A such that the argument within the square root becomes $B^2 - v^2$ for some B, that is to say, such that

$$(\mu^2 - u^2)(u^2 + m^2) = B^2 - v^2$$

$$[\mu^2 - (v+A)][(v+A) + m^2] = B^2 - v^2$$

$$(\mu^2 - A - v)(A + m^2 + v) = (B - v)(B + v)$$

Taking

$$\left.\begin{array}{l} B = \mu^2 - A \\ B = A + m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}(\mu^2 + m^2), \quad A = \frac{1}{2}(\mu^2 - m^2) \qquad (*)$$

and using $2u\,du = dv$ we have

$$\phi - \phi_0 = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{B^2 - v^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(v/B)}{\sqrt{1 - (v/B)^2}} = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{v}{B}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{v}{B} = \cos[2(\phi - \phi_0)]$$

$$u^2 - A = B\cos[2(\phi - \phi_0)]$$

$$\frac{1}{r^2} = A + B\cos[2(\phi - \phi_0)] = [\text{use } (*)] = \frac{1}{2}(\mu^2 - m^2) + \frac{1}{2}(m^2 + \mu^2)\cos[2(\phi - \phi_0)]$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}\mu^2[1 + \cos(2(\phi - \phi_0))] - \frac{1}{2}m^2[1 - \cos(2(\phi - \phi_0))]$$

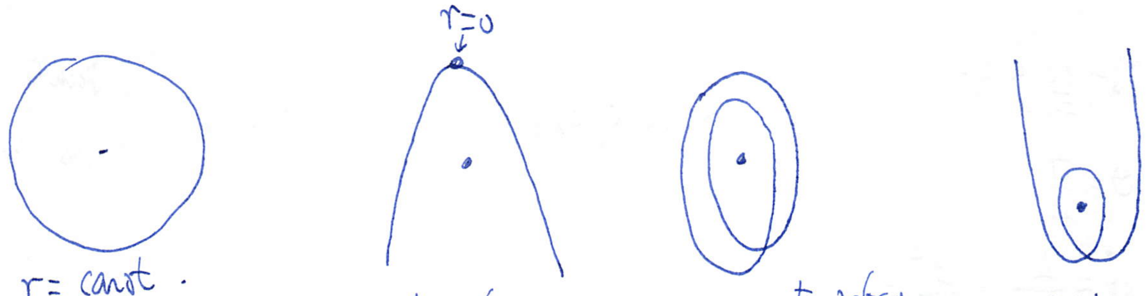
$$\frac{1}{r^2} = \mu^2\cos^2(\phi - \phi_0) - m^2\sin^2(\phi - \phi_0)$$

$$\frac{r^2\cos^2(\phi - \phi_0)}{m^2} - \frac{r^2\sin^2(\phi - \phi_0)}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2 m^2}$$ equation of an hyperbola in the (r, ϕ) plane

$\Downarrow$

$$\boxed{\text{There are no closed geodesics for light rays}}$$

Otra solución. Para que una geodésica sea cerrada es condición necesaria pero no suficiente que tenga al menos un punto de retorno. En un tal punto $\dot r = 0$ y r pasa de crecer ($\dot r > 0$) a decrecer ($\dot r < 0$), o al contrario. Ejemplos



$r =$ const. 1 pto retorno cerrada — 1 pto retorno abierta — varios ptos retorno cerrada — varios ptos retorno abierta

Empecemos calculando los puntos de retorno en nuestro caso. La ec. (2) es

$$(u^2 = 0 \Rightarrow)\quad \dot r^2 = \left(E^2 - \frac{L^2}{r^2}\right)(1+m^2r^2) \underset{\dot r = 0}{\Longrightarrow} r_0^2 = \frac{L^2}{E^2} \underset{r>0}{\Longrightarrow} r_0 = \frac{L}{E}$$

Es decir, sólo puede haber un punto de retorno, $r_0 = \frac{L}{E}$. Por lo que, de existir una geodésica (nula) cerrada, ésta sólo puede ser una circunferencia de radio $r_0 = \frac{L}{E}$. Para ver si éste es el caso se usa la ecuación geodésica para r

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_{ef}}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\cancel{2}\dot r}{1+m^2r^2}\right) - \left[-\frac{\cancel{2}m^2 r}{(1+m^2r^2)^2}\dot r^2 + \cancel{2}r\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2\right)\right] = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot\theta = 0,\ \sin\theta = 1\ ; \quad \dot\phi = \frac{L}{r^2}$$

$$\frac{\ddot r}{1+m^2r^2} - \frac{2m^2 r\dot r^2}{(1+m^2r^2)^2} + \frac{m^2 r\dot r^2}{(1+m^2r^2)} - \frac{L^2}{r^3} = 0$$

$$\ddot r = \frac{m^2 r\dot r^2}{1+m^2r^2} + (1+m^2r^2)\frac{L^2}{r^3} \qquad (4)$$

Para $r=\frac{L}{E}$ la ecuación anterior se reduce a $\left(1+m^2\frac{L^2}{E^2}\right)\frac{E^3}{L}=0$, o lo que es lo mismo, $\frac{E}{L}(E^2+m^2L^2)=0$, que implica $E=0$, que a su vez implica

$$\left.\begin{array}{l} \dot{t}=E=0 \\ r_0=\frac{L}{E}=\infty \\ \theta=\frac{\pi}{2} \\ \dot{\phi}=\frac{L}{r_0^2}=\frac{E^2}{L}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (t,r,\theta,\phi)=\left(t_0,\infty,\frac{\pi}{2},\phi_0\right)$$

que corresponde a un punto y no a una curva. Así pues $r=r_0$ no es una geodésica nula.

Argumentar que una circunferencia no es geodésica no es suficiente para descartar geodésicas cerradas de cualquier tipo. Hay que acompañar el argumento con el razonamiento de los puntos de retorno. Esta solución (y las dos que siguen) es menos potente que la anterior, pues no determina la forma de las geodésicas, pero contesta a lo que se pide.

Nota. Las geodésicas circulares también pueden descartarse usando el argumento de que el potencial efectivo no tiene extremos.

0.5 por descartar geodésicas circulares

1 punto por el resto.

Otra solución. De la ecuación geodésica para la coordenada r, escrita en la forma (4) se sigue que $\ddot{r} \geq 0$. Es más, recordando que $L = r^2\dot{\phi}$, se tiene que

$$\ddot{r} = 0 \iff 0 = r\left[\frac{m^2\dot{r}^2}{1+m^2r^2} + (1+mr^2)\dot{\phi}^2\right] \Rightarrow \begin{cases} a) & r = 0 \\ b) & \dot{r} = \dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

El caso a) corresponde al origen de coordenadas, y el b) a la circunferencia, que se descarta como ya se ha descrito. Así pues $\ddot{r} > 0$, que quiere decir que $\dot{r}$ crece, por lo que no hay ningún punto de retorno y no existen geodésicas cerradas.

Otra solución es a partir de la ecuación de Binet. Para obtener esta última usamos que

$$u=\frac{1}{r} \Rightarrow \dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{d\phi}\underset{\uparrow \atop \frac{L}{r^2}}{\dot{\phi}}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}Lu^2=-L\frac{du}{d\phi}$$

para escribir la condición de la capa de masas $\dot{r}^2=(E^2-\frac{L^2}{r^2})(1+m^2r^2)$ en la forma

$$L^2\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2=(E^2-u^2L^2)\left(1+m^2\frac{1}{u^2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2=(\mu^2-u^2)\left(1+\frac{m^2}{u^2}\right)$$

que no es otra cosa que la ec. (3) de la primera página. Derivando con respecto a ϕ se tiene

$$2\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2}=\frac{du}{d\phi}\left[-2u\left(1\cancel{+\frac{m^2}{u^2}}\right)-(\mu^2\cancel{-u^2})\frac{2m^2}{u^3}\right]$$

$$=-2\frac{du}{d\phi}\left(u+\frac{\mu^2m^2}{u^3}\right)$$

Hasta aquí es como para Schwarzschild.

Esta ecuación se satisface trivialmente si $\frac{du}{d\phi}=0$ que equivale a que r no cambia con ϕ, es decir $r=\text{cont}$, que es una circunferencia, y se descarta de la misma forma que antes. Si $\frac{du}{d\phi}\neq 0$, se tiene entonces

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}=-\left(u+\frac{\mu^2m^2}{u^3}\right)\underset{\uparrow \atop u=\frac{1}{r}\geq 0}{<0} \Rightarrow \frac{du}{d\phi} \text{ decrece monótonamente}$$

$\Rightarrow \frac{du}{d\phi}$ no se anula $\Rightarrow$ no hay punto de retorno $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{no hay geodésicas nulas cerradas}}$