UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

Relatividad general y gravitación
Examen parcial
17 de diciembre de 2019

(Tiempo disponible: **1 hora y 30 minutos**)

Problema 1 [2.5 puntos]. Señalar con una **V** las afirmaciones verdaderas y con una **F** las falsas. Cada respuesta correcta puntúa 0.5 puntos. Cada respuesta incorrecta penaliza 0.25 puntos.

- **F** Un observador en caída libre en un campo gravitatorio se mueve según una geodésica de género luz.
- **F** Un covector ω_μ permance invariante bajo un cambio de coordenadas si el campo vectorial que genera el cambio es de Killing.
- **V** Un espacio-tiempo es plano si y sólo si en todo punto P del mismo es posible escoger un sistema local de coordenadas $\{x^\mu\}$ en el que $g_{\alpha\beta}(x)\big|_P = \eta_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}(x)\big|_P = 0$ y $\partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}(x)\big|_P = 0$.
- **V** En dimensión tres, una métrica es plana si y sólo si su tensor de Ricci es cero.
- **F** En dimensión tres, una métrica es plana si y sólo si su escalar de Ricci es cero.

Problema 2 [1 punto]. Escribir en un sistema local de coordenadas $\{x^0, x^1, x^2\}$ las componentes linealmente independientes del tensor de Riemann en tres dimensiones.

$\boldsymbol{R_{0101}}$, $\boldsymbol{R_{0102}}$, $\boldsymbol{R_{0112}}$, $\boldsymbol{R_{0202}}$, $\boldsymbol{R_{0212}}$, $\boldsymbol{R_{1212}}$

Problema 3 [1 punto]. Sea la métrica (unidades $c = 1$)

$$ds^2 = -e^{2A(\ell)}dt^2 + d\ell^2 + (\ell^2 + \ell_0^2)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

donde $A(\ell)$ es una función de su argumento, ℓ_0 es una constante con dimensiones de longitud y

$$-\infty < t, \ell < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Calcular sus símbolos de Christofell $\Gamma^t{}_{\mu\nu}$. Escribir sólo aquellos que sean distintos de cero.

$$\boldsymbol{\Gamma^t{}_{t\ell} = \Gamma^t{}_{\ell t} = \frac{dA(\ell)}{d\ell}}$$

Operaciones al final

Problema 4 [1 punto]. Encontrar la transformación $\delta\omega_\mu = \bar{\omega}_\mu(x) - \omega_\mu(x)$ de un covector ω_μ bajo el cambio de coordenadas $x^\mu \to \bar{x}^\mu = x^\mu + \epsilon\,\xi^\mu(x)$ generado por el campo ξ^μ.

$$\delta\omega_\mu = \boldsymbol{-\epsilon\big[\xi^\alpha\partial_\alpha\omega_\mu(x) + \omega_\alpha(x)\,\partial_\mu\xi^\alpha(x)\big] + O(\epsilon^2)}$$

Por definición de covector,

$$\bar{\omega}_\mu(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\,\omega_\alpha(x)\,.$$

Usando

$$x^\alpha = \bar{x}^\alpha - \epsilon\,\xi^a(x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta^\alpha_\mu - \epsilon\,\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta^\alpha_\mu - \epsilon\,\partial_\beta\xi^\alpha(x)\,\big[\delta^\beta{}_\mu + O(\epsilon)\big] = \delta^\alpha_\mu - \epsilon\,\partial_\mu\xi^\alpha(x) + O(\epsilon^2)\,.$$

se tiene

$$\bar{\omega}_\mu(\bar{x}) = \omega_\mu(x) - \epsilon\,\omega_\alpha(x)\,\partial_\mu\xi^\alpha(x) + O(\epsilon^2) \qquad \text{(A)}$$

Por otro lado,

$$\bar{\omega}_\mu(\bar{x}) = \bar{\omega}_\mu\big(x + \epsilon\xi(x)\big) = [\text{Taylor}] = \bar{\omega}_\mu(x) + \epsilon\,\xi^\alpha\partial_\alpha\bar{\omega}_\mu(x) + O(\epsilon^2)$$

El término $\epsilon\,\xi^\alpha\partial_\alpha\bar{\omega}(x)$ es ya de orden 1 en ϵ. Como $\bar{\omega}_\mu(x) = \omega_\mu(x) + O(\epsilon)$, se tiene entonces

$$\bar{\omega}_\mu(\bar{x}) = \bar{\omega}_\mu(x) + \epsilon\,\xi^\alpha\partial_\alpha\omega_\mu(x) + O(\epsilon^2)\,. \qquad \text{(B)}$$

Igualando (A) y (B) se llega a

$$\omega_\mu(x) - \omega_\alpha(x)\,\partial_\mu\xi^\alpha(x) = \bar{\omega}_\mu(x) + \epsilon\,\xi^\alpha\partial_\alpha\omega_\mu(x) + O(\epsilon^2) \quad\Rightarrow\quad \text{resultado en la caja}\,.$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos ...	
Nombre ...	DNI ...
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ...

Problema 5 [3 puntos]. En los apartados (c) y (d) es necesario entregar los cálculos. Usar para ellos el espacio en blanco que les sigue.

Un campo gravitatorio está descrito por la métrica (unidades $c = 1$)

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\big)\,, \quad f(r) = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2.$$

(a) Encontrar las cantidades conservadas y escribir en términos de ellas la condición sobre $\dot{x}^2$ para las geodésicas de género luz y tiempo.

Por conservación de momento angular, las geoésicas están contenidas en un plano, que (mediante elección adecuada de los orígenes de coordendas para los ángulos θ y ϕ) puede tomarse sin pérdida de generalidad como el plano $\boldsymbol{\theta = \pi/2}$. Con esta elección se tiene

$$\boldsymbol{E := f(r)\dot{t}\,, \quad L := r^2\dot{\phi}} \qquad \text{son cantidades conservadas sobre las geodésicas.}$$

La condición para $\dot{x}^2$ es

$$\boldsymbol{E = \dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{r^2} - k\right) f(r)}\,, \text{ con } k = -1 \text{ para género tiempo y } k = 0 \text{ para género luz.}$$

(b) ¿Es posible que la luz quede atrapada en en una órbita $r = r_0 =$ const? De ser el caso, determinar r_0.

Sí, en $\boldsymbol{r_0 = 2m}$ Operaciones al final

(c) Encontrar las trayectorias $t = t(r)$ de los rayos de luz que, con θ y ϕ constantes, viajan hacia el exterior.

(d) Escribir la métrica en coordenadas (v, r, θ, ϕ), donde $v = t + t(r)$, y discutir sus singularidades.

(c) Los rayos de luz ($ds^2 = 0$) con θ y ϕ constantes ($d\theta = d\phi = 0$) satisfacen

$$0 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \quad \Rightarrow \quad \pm\,dt = \frac{dr}{f(r)}\,. \qquad \text{(C)}$$

Nos quedamos con el signo positivo pues para $dt>0$ piden $dr>0$. Se tiene entonces

$$dt = \frac{dr}{(1-\frac{m}{r})^2} = \frac{(\frac{r}{m})^2 dr}{(\frac{r}{m}-1)^2} = \left[\text{cambio } \frac{r}{m}=x\right] = m\,\frac{x^2 dx}{(x-1)^2}$$

Usando $\frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^2 = 1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$ e integrando se llega a

$$\boxed{t(r) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{constante} \\ \text{de integración}}}{t_0} + r + 2m\ln\left(\frac{r}{m}-1\right) - \frac{m}{\frac{r}{m}-1}}$$

(d) $v = t + t(r) \Rightarrow dv = dt + \frac{dt}{dr}dr \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ec. (c) para signo positivo}}}{=} dt + \frac{1}{f(r)}dr \Rightarrow$

$$\Rightarrow ds^2 = \underbrace{-f\left(dv - \frac{1}{f}dr\right)^2 + \frac{dr^2}{f}}_{-f\left(dv^2 - \frac{2}{f}dv\,dr + \cancel{\frac{dr^2}{f^2}}\right) + \cancel{\frac{dr^2}{f}}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dv^2 + 2\,dv\,dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi)}$$

Los coeficientes son regulares para $r>0$. La singularidad en $r=m$ ha desapareciado. Lo único que ocurre es que $g_{vv}(r=m)=0$

Nótese también que $\det(g_{\mu\nu}) = -r^4\sin^2\theta$ en coordenadas (v, r, θ, ϕ).

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos ....

Nombre .... DNI ....

Asignatura Relatividad general y gravitación Grupo A y A2

Curso 4º Fecha ....

Apartados (a) y (b) del problema 5

(a) t cíclica $\Rightarrow f(r)\dot{t} = \text{const} =: E$ (D)

ϕ cíclica $\Rightarrow r^2\dot{\phi} = \text{const} =: L$ (E)

geodésicas contenida en un plano, que se puede tomar $\theta = \frac{\pi}{2}$ (F)

$$\dot{x}^2 = k = \begin{cases} -1 & \text{género tiempo} \\ 0 & \text{género luz} \end{cases} \iff -f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = k$$

$$\Big\downarrow \text{(A), (B), (C)}$$

$$-\frac{E^2}{f} + \frac{\dot{r}^2}{f} + \frac{L^2}{r^2} = k$$

$$E^2 = \dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{r^2} - k\right) f(r)$$

(b)
$$\left.\begin{array}{l} L_{ef} = -f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ec geodésica para } r \text{ toma la forma}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot{r}}{f}\right) - \left[-f'\dot{t}^2 - \frac{f'\dot{r}^2}{f^2} + 2r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\right] = 0$$

$$\ddot{r} - \frac{f'}{2f}\dot{r}^2 + \frac{ff'}{2}\dot{t}^2 - rf(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) = 0$$

$$\Big\downarrow r = r_0 = \text{const}, \text{(D)}, \text{(E)}, \text{(F)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}f'\frac{E^2}{f^2} - \frac{L^2}{r^3} = 0 \\ \text{Ec (D) para } k=0,\ r=r_0 \Rightarrow E^2 = \frac{L^2}{r^2}f \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f'}{2f} = \frac{1}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cancel{\left(1-\frac{m}{r}\right)}\frac{m}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{2}\left(1-\frac{m}{r}\right)^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{r}} \Rightarrow \frac{m}{r} = 1 - \frac{m}{r} \Rightarrow \boxed{r = 2m}$$

Problema 3

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} t & l & \theta & \phi \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ l \\ \theta \\ \phi \end{array} & \begin{pmatrix} -e^{2A(l)} & & & \\ & 1 & & \\ & & l^2+l_0^2 & \\ & & & (l^2+l_0^2)\sin^2\theta \end{pmatrix} \end{array}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2A(l)} & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{l^2+l_0^2} & \\ & & & \frac{1}{(l^2+l_0^2)\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^t{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{t\alpha}(\underset{l}{\partial_\mu} \underset{tt}{g_{\alpha\nu}} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) =$$

α debe ser t, pero para $\alpha = t$, $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} g^{tt}}(\delta_\nu{}^t \delta_\mu{}^l + \delta_\mu{}^t \delta_\nu{}^l) \underbrace{\partial_l g_{tt}} \implies$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2}(-e^{-2A})\,\partial_l(-e^{2A}) = \frac{dA}{dl}$$

$$\implies \Gamma^t{}_{tl} = \Gamma^t{}_{lt} = \frac{dA}{dl}$$