UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

Relatividad general y gravitación
Examen parcial - 18 de diciembre de 2018

(Tiempo disponible: **1 hora 30 minutos**)

Problema 1 [1 punto]. De la siguientes afirmaciones señálense las que sean ciertas

- ■ En todo punto x_0^μ de un espacio-tiempo en un campo gravitatorio es posible escoger un sistema de referencia en el que $g_{\alpha\beta}(x)\big|_{x=x_0} = \eta_{\alpha\beta}$ y $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}(x)\big|_{x=x_0} = 0$.
- ☐ Un espacio-tiempo de dimesión dos es plano si y sólo si su tensor de Ricci y su escalar de Ricci satisfacen $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$.
- ■ Un espacio-tiempo de dimensión dos es plano si y sólo si el escalar de Ricci se anula.
- ☐ Todo espacio-tiempo de dimensión dos es plano porque $R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ y entonces no es posible formular las ecuaciones de Einstein.

Problema [1.5 puntos]. Una métrica está dada en unas coordenadas $\{v, r, x, y\}$ por

$$ds^2 = -r^2\, k(r)\, dv^2 + 2dvdr + r^2\left(dx^2 + dy^2\right),$$

donde $k(r)$ es una función de r. Encuéntrense los símbolos de Christoffel $\Gamma^v{}_{vv}$, $\Gamma^r{}_{vv}$ y $\Gamma^r{}_{xx}$.

$$\Gamma^v{}_{vv} = rk + \frac{1}{2} r^2 k' \qquad \Gamma^r{}_{vv} = r^2 k \left(r\, k + \frac{1}{2} r^2 k' \right) \qquad \Gamma^r{}_{xx} = -r^3 k$$

donde la prima indica derivada con respecto a r. En la siguiente página se calculan de dos formas distintas todos los Christoffel.

$$ds^2 = 2\,dv\,dr - r^2 f(r)\,dv^2 + r^2\,d\vec{x}^{\,2}$$

$\uparrow$

in general $\delta_{ij}\,dx^i dx^j \to n-2$ dimensional

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c} v \\ r \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} -r^2 f & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & r^2\delta_{ij} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} v & r & j \end{array} \end{array} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & r^2 f & \\ \hline & & \delta^{ij}/r^2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} v & r & j \end{array} \end{array}\!\!\begin{array}{c} v \\ r \\ i \\ \\ \end{array}$$

$$\Gamma^v{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{\partial_\alpha g_{r\beta}} + \cancelto{0}{\partial_\beta g_{\alpha r}} - \partial_r g_{\alpha\beta}\right)$$

$$\Gamma^v{}_{vv} = -\frac{1}{2}(-r^2 f)' = \frac{1}{2}(r^2 f)' \qquad f' := \frac{df}{dr}$$

$$\Gamma^v{}_{ij} = -\frac{1}{2}(r^2\delta_{ij})' = -r\delta_{ij}$$

$$\Gamma^r{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{v\beta} + \partial_\beta g_{v\alpha} - \cancelto{0}{\partial_v g_{\alpha\beta}}\right) + \frac{1}{2} r^2 f\left(\partial_\alpha g_{r\beta} + \partial_\beta g_{\alpha r} - \partial_r g_{\alpha\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha{}^r\delta_\beta{}^v + \delta_\alpha{}^v\delta_\beta{}^r\right)(-r^2 f)' + r^2 f\,\Gamma^v{}_{\alpha\beta}$$

$$\Gamma^r{}_{vv} = r^2 f\,\Gamma^v{}_{vv} = \frac{1}{2}(r^2 f)(r^2 f)'$$

$$\Gamma^r{}_{ij} = r^2 f\,\Gamma^v{}_{ij} = -(r^2 f)\,r\,\delta_{ij} = -r^3 f\,\delta_{ij}$$

$$\Gamma^r{}_{vr} = -\frac{1}{2}(r^2 f)'$$

$$\Gamma^i{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2r^2}\left(\partial_\alpha g_{i\beta} + \partial_\beta g_{i\alpha} - \cancelto{0}{\partial_i g_{\alpha\beta}}\right) \Rightarrow \Gamma^i{}_{rj} = \frac{1}{r}\delta^i{}_j$$

An alternative derivation is to use the Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad , \quad L = L_{eff} = 2\dot{v}\dot{r} - r^2 f(r)\,\dot{v}^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n-2} (\dot{x}^i)^2$$

to obtain the geodesic equations

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\,\dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0$$

and from the resulting expressions read off $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$.

For $x^\mu = x^i$: $\quad \frac{d}{d\tau}(2r^2\dot{x}^i) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2r^2\ddot{x}^i + 4r\dot{r}\dot{x}^i = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}^i + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{x}^i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Gamma^i{}_{rj} = \frac{1}{r}\delta^i_j$$

For $x^\mu = r$: $\quad \frac{d}{d\tau}(2\dot{v}) - \left[-(r^2 f)'\dot{v}^2 + 2r\,\delta_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j\right] = 0 \quad \Rightarrow$

$$\ddot{v} + \frac{1}{2}(r^2 f)'\,\dot{v}^2 - r\,\delta_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^v{}_{vv} = \frac{1}{2}(r^2 f)'$$

$$\Gamma^v{}_{ij} = -r\,\delta_{ij}$$

For $x^\mu = v$: $\quad \frac{d}{d\tau}(2\dot{r} - 2r^2 f\dot{v}) = 0$

$\ddot{r} - r^2 f\ddot{v} - (r^2 f)'\,\dot{r}\dot{v} = 0$. Use the geodesic eqn. for v

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}r^2 f\,(r^2 f)'\,\dot{v}^2 - r^3 f\,\delta_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j - (r^2 f)'\,\dot{r}\dot{v} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^r{}_{vv} = \frac{1}{2}r^2 f\,(r^2 f)'$$

$$\Gamma^r{}_{ij} = -r^3 f\,\delta_{ij}$$

$$\Gamma^r{}_{rv} = -\frac{1}{2}(r^2 f)'$$

Problema 3. [1.5 puntos]. El espacio-tiempo de Schwarzschild está dado por la métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\big)\,,$$

donde $-\infty < t < \infty$, $r > 2m$, $0 \le \theta \le \pi$ y $0 \le \phi < 2\pi$. Encontrar las trayectorias de los rayos de luz que viajan radialmente, es decir, con $\theta = \pi/2$ y $\phi =$const. Expresar el resultado dando t como función de r. Para ello:

(a) Obtener una ecuación diferencial para $t(r)$.

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Se sigue de imponer $ds^2 = 0$ (género luz), $d\theta = d\phi = 0$ y tomar raíces.

(b) Resolver dicha ecuación para encontrar $t(r)$

$$t(r) = \pm\left[r + 2m\,\ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right)\right] + \text{const}$$

Basta integrar

$$t = \pm\int dr\,\frac{r - 2m + 2m}{r - 2m} = \pm\int dr\left(1 + \frac{1}{\frac{r}{2m} - 1}\right)$$

para obtener el resultado en la caja.

Problema 4. [2 puntos]. Dada una métrica $g_{\mu\nu}$, demuéstrese que si ξ^μ es un vector de Killing y $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ el tensor de Riemann entonces

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\,\xi_\lambda = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}\xi_\rho\,.$$

Utilizar para la demostración el espacio que sigue.

Demuéstrese que si ξ^μ es un vector de Killing de la métrica $g_{\mu\nu}$ y $R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ es el tensor de Riemann entonces

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho$$

From the definition of the Riemann tensor one has

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \xi_\lambda = -R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} \xi_\rho$$

$$[\nabla_\nu, \nabla_\lambda] \xi_\mu = -R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho$$

$$[\nabla_\lambda, \nabla_\mu] \xi_\nu = -R^\rho{}_{\nu\lambda\mu} \xi_\rho$$

Summing these three equations and using

$$R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} + R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} + R^\rho{}_{\nu\lambda\mu} = 0$$

one obtains

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\xi_\lambda + (\nabla_\nu \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu)\xi_\mu + (\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda)\xi_\nu = 0$$

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu \xi_\lambda - \nabla_\lambda \xi_\nu) + \nabla_\nu (\nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \xi_\lambda) + \nabla_\lambda (\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu) = 0$$

Using $\nabla_\nu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\nu = 0$, the last equation can be recast as

$$2(\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu + \underbrace{\nabla_\lambda \nabla_\mu \xi_\nu}_{= -\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu}) = 0$$

since ξ^ν is Killing

$$(\nabla_\nu \nabla_\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu)\xi_\mu = -\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda$$

$$[\nabla_\nu, \nabla_\lambda]\xi_\mu = -\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda$$

$$-R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho = -\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda .$$