



## Relatividad general y gravitación

### Curso 2021/22, Grupos A y A2 - Problemas

Los comentarios y apartados en **rojo** son de dificultad superior. Se recomienda intentarlos si se han resuelto y entendido los demás.

1. Argumentar que en la intersección de los dominios relativista  $R \rightarrow R_{\text{Sch}}$  y cuántico  $R \rightarrow R_{\text{Com}}$  la escala de masas (llamada masa de Planck) es aproximadamente  $1.22 \text{ GeV}/c^2$ . A partir de ella, obtener unidades para la longitud (longitud de Planck) y el tiempo (tiempo de Planck) y estimarlas numéricamente.

2. Considérese un observador en espacio de Minkowski,

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

que se encuentra en el plano  $x^2 = x^3 = 0$  y que se mueve con aceleración constante  $a$  en la dirección de  $x^1$ . Esto quiere decir que en el sistema de referencia en el que en cada instante el observador se encuentra en reposo su velocidad y aceleración están dadas por  $u_{\text{rest}}^\mu = (1, 0, 0, 0)$  y  $a_{\text{rest}}^\mu = (0, a, 0, 0)$ . Nótese que este sistema de referencia no puede obtenerse a partir de un sistema de referencia inercial mediante una transformación de Lorentz.

(a) Encuéntrase la línea del universo de dicho observador, es decir, la curva que sigue en su movimiento vista desde un sistema de referencia inercial. ¿De qué curva se trata? Nótese que al haber una fuerza responsable de la aceleración,  $d^2x^\mu/d\tau^2 \neq 0$ .

(b) Hállese un cambio de coordenadas  $\{x^0, x^1\} \rightarrow \{\eta, \rho\}$  en las que

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -g_{\eta\eta} d\eta^2 + g_{\rho\rho} d\rho^2$$

y tal que  $\rho = \text{const}$  para el observador en las nuevas coordenadas. Determinar el lapso de tiempo propio del observador en términos de los lapsos de las coordenadas  $\{\eta, \rho\}$ .

(c) ¿Cuáles son las curvas de género luz en las coordenadas  $\{\eta, \rho\}$ ?

3. Demostrar a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para las geodésicas que:

(a) Toda coordenada de la que la lagrangiana no depende explícitamente da lugar a una cantidad conservada, cantidad asociada a invariancia bajo traslaciones en la dirección de la coordenada

(b) Para una métrica de la forma

$$ds^2 = dz^2 + g_{\mu\nu}(x, z) dx^\mu dx^\nu ,$$

las líneas coordenadas de  $z$  (es decir, aquellas para las que  $\ddot{z} = 0$  y  $\dot{x}^\mu = 0$ ) son geodésicas.

4. Los símbolos de Christoffel pueden introducirse de la siguiente forma. Se parte de un sistema de coordenadas inerciales globales  $\{x^\mu\}$  en el espacio de Minkowski, en las que la ecuación de una geodésica de género tiempo se escribe  $\ddot{x}^\mu = 0$ , donde el punto indica derivada con respecto al tiempo propio. Se pasa a un sistema de coordenadas arbitrario no inercial  $\{y^\mu\}$  en el que la ecuación de la geodésica toma la forma

$$\ddot{y}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{y}^\nu \dot{y}^\lambda = 0 ,$$

con

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\nu \partial y^\lambda}$$

los símbolos de Christoffel. Demostrar a partir de

$$g_{\mu\nu}(y) = \eta_{\lambda\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}$$

que

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^\rho} \right) .$$

5. Considérese una partícula de masa  $m$  que se mueve según una geodésica en un espacio-tiempo con métrica estática

$$ds^2 = -e^{2U_N(\mathbf{x})/c^2} c^2 dt^2 + h_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j ,$$

siendo  $U_N(\mathbf{x})$  el potencial gravitatorio de Newton. Demostrar que la ecuación correspondiente de capa de masas reproduce en el límite de campo débil no relativista la expresión

$$E = mc^2 \left( 1 + \frac{U_N}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

para la energía de la partícula.

6. Considérese en dimensión dos métricas de la forma

$$ds_2^2 = g_{\rho\rho}(\rho) d\rho^2 + g_{\phi\phi}(\rho) d\phi^2 . \quad 0 \leq \phi < 2\pi .$$

Para ellas es usual definir la **distancia radial**  $r(\rho)$  del punto  $(\rho, \phi)$  al origen de coordenadas y la **longitud**  $\ell(\rho)$  **de la curva cerrada**  $\rho = \text{const}$  que pasa por dicho punto como

$$r(\rho) = \int_0^\rho d\rho' \sqrt{g_{\rho\rho}(\rho')} \quad \text{y} \quad \ell(\rho) = \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho)} = 2\pi \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho)},$$

respectivamente. Para la métrica euclídea se tiene  $g_{\rho\rho} = 1$  y  $g_{\phi\phi} = \rho^2$ . En este caso,  $r(\rho) = \rho$ ,  $\ell(\rho) = 2\pi\rho$  y el cociente entre ambas es  $\ell(\rho)/r(\rho) = 2\pi$ . Calcúlense  $r(\rho)$ ,  $\ell(\rho)$  y sus cocientes para las siguientes métricas

$$\begin{aligned} (a) \quad ds^2 &= d\rho^2 + \sin^2 \rho \, d\phi^2 & 0 \leq \rho < \pi & \quad 2\text{-esfera} \\ (b) \quad ds^2 &= \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2}{(a^2 - \rho^2)^2} & 0 \leq \rho < a & \quad \text{disco de Poincaré} \\ (c) \quad ds^2 &= d\rho^2 + a^2 \tanh^2(\rho/a) d\phi^2 & 0 \leq \rho < \infty & \quad \text{puro semi-infinito} \end{aligned}$$

donde  $a$  es una constante con dimensiones de longitud.

Para entender por qué se llama a la métrica (c) del puro semi-infinito, basta notar que para  $\rho$  constante, la métrica es la de una circunferencia de radio  $R = a \tanh(\rho/a)$  y que el radio de esta circunferencia se hace constante a grandes distancias pues  $R \rightarrow a$  para  $\rho \rightarrow \infty$ . Así pues, a grandes distancias, se trata de un cilindro de radio  $a$ . Por otro lado, según nos aproximamos al origen ( $\rho \rightarrow 0$ ) el radio del cilindro disminuye hasta que se hace cero. Nótese finalmente que la métrica es regular en el origen pues  $ds^2 \sim d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$  para  $\rho \rightarrow 0$ .

**7.** Considérese la métrica

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2}{(a^2 + \rho^2)^{2\alpha}}, \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

con  $0 \leq \alpha < 1/2$ . Calcúlese su escalar de Ricci. ¿Qué geometría describe para  $a/\rho \ll 1$ ?

**8.** [Carroll 3.5] Considérese una 2-esfera con coordenadas  $(\theta, \phi)$  y métrica

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2.$$

(a) Demuéstrese que las líneas de longitud constante ( $\phi = \text{constante}$ ) son geodésicas, y que la única línea de latitud constante ( $\theta = \text{constante}$ ) que es geodésica es el ecuador  $\theta = \pi/2$ .

(b) Tómese un vector  $v^\mu = (1, 0)$  y transpórtese paralelamente dando una vuelta completa a lo largo de una circunferencia de latitud constante. Determinénse las componentes del vector resultante como funciones de  $\theta$ .

**9.** Pruébese que para una geodésica  $x^\mu(\lambda)$  con parámetro afín  $\lambda$  se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda} \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = 0.$$

Esto implica en particular que el género de la geodésica (tiempo, luz o espacio) se conserva.

**10.** Demuéstrese que la aceleración covariante  $a^\mu = Du^\mu/D\tau$  para una partícula masiva satisface  $u_\mu a^\mu = 0$ .

**11.** La ecuación de transporte para un vector  $v^\mu$  a lo largo de una curva  $x^\mu(\lambda)$  es

$$\frac{Dv^\mu}{D\lambda} = \kappa(\lambda) v^\mu.$$

donde  $\kappa(\lambda)$  es una función conocida. Encuéntrese un vector  $w^\mu$  para el que el transporte sea paralelo, es decir, para el que  $Dw^\mu/D\lambda = 0$ .

**12.** Considérese el cambio de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$ , con  $\epsilon$  pequeño. Para un tensor  $T$  se define la variación  $\delta T$  como  $\delta T(x) = T'(x) - T(x)$ . ¡Ojo a las primas!

a) Demuéstrese que para un vector  $V^\mu$  se tiene que

$$\delta V^\mu(x) = -\epsilon \left[ \xi^\alpha (\partial_\alpha V^\mu) - (\partial_\alpha \xi^\mu) V^\alpha \right] + O(\epsilon^2).$$

b) Demuéstrese que para la métrica  $g_{\mu\nu}$  se tiene

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\epsilon \left[ \xi^\alpha (\partial_\alpha g_{\mu\nu}) + (\partial_\mu \xi^\alpha) g_{\alpha\nu} + (\partial_\nu \xi^\alpha) g_{\mu\alpha} \right] + O(\epsilon^2).$$

Pruébese que esta ecuación puede escribirse como

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\epsilon \left( \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \right).$$

De aquí se sigue que si

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (1)$$

el cambio  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$  es una simetría continua de la métrica, llamada **isometría**. Los vectores  $\xi^\mu$  que satisfacen la condición (1) reciben el nombre de **vectores de Killing**. Los operadores diferenciales  $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$  que definen son los generadores infinitesimales de las isometrías.

**Nota.** Se define la derivada de Lie de un tensor  $T$  a lo largo de un vector  $\xi^\mu$  como

$$\mathcal{L}_\xi T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x) - T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x)}{\epsilon}.$$

En particular, la derivada de Lie de un vector  $V^\mu$  es

$$\mathcal{L}_\xi V^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha V^\mu - V^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu = \xi^\alpha \nabla_\alpha V^\mu - V^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu = \nabla_\xi V^\mu - \nabla_V \xi^\mu.$$

**13.** Demuéstrese que si los coeficientes  $g_{\mu\nu}$  de la métrica  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  no dependen de una coordenada, digamos  $z$ , entonces  $\xi = \partial_z$  es un vector de Killing.

**14.** Demuéstrese que si  $\xi^\mu$  es un vector de Killing y  $\gamma$  es una geodésica con vector tangente  $u^\mu$  entonces  $\xi_\mu u^\mu$  es constante a lo largo de  $\gamma$ .

**15.** Compruébese que los vectores

$$\begin{aligned} \xi_{(1)} &= \partial_t, \\ \xi_{(2)} &= \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi, \\ \xi_{(3)} &= -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \\ \xi_{(4)} &= -\partial_\phi, \end{aligned}$$

son Killing para una métrica estática con simetría esférica. El primero de ellos genera traslaciones en el tiempo. Los tres últimos son las componentes del momento angular y

generan rotaciones. Así pues, bajo traslaciones temporales y rotaciones la métrica (5) no cambia.

**16.** [Febrero 2016] Escribanse cuatro vectores de Killing de la métrica ( $c = 1$ )

$$ds^2 = \frac{1}{z} (-dt^2 + dx^2 + dy^2) + z dz^2, \quad x, y, z \in \mathbf{R}, \quad z \in \mathbf{R}_+.$$

**17.** Si  $V = V^\mu \partial_\mu$  y  $W = W^\mu \partial_\mu$  son campos vectoriales, demuéstrese que su conmutador tiene componentes

$$\begin{aligned} [V, W]^\mu &= V^\nu \partial_\nu W^\mu - W^\nu \partial_\nu V^\mu \\ &= V^\nu \nabla_\nu W^\mu - W^\nu \nabla_\nu V^\mu. \end{aligned}$$

**Nota.** Obsérvese que  $[V, W]^\mu = \mathcal{L}_V W^\mu$ .

**18.** Demuéstrese que si  $A^\mu$  y  $B^\mu$  son vectores de Killing, su conmutador  $[A, B]^\mu$  también lo es.

**19.** [Junio 2013] Demuéstrese que todo vector de Killing satisface  $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu = -R^\mu{}_\alpha \xi^\alpha$ .

**20.** [Junio 2014] Demuéstrese que si el vector  $\chi^\nu$  satisface

$$\nabla_\mu \chi_\nu + \nabla_\nu \chi_\mu = c g_{\mu\nu}, \quad c = \text{constante} > 0$$

y  $\gamma$  es una geodésica de género luz con vector tangente  $u^\mu$ , entonces  $u^\mu \chi_\mu$  permanece constante a lo largo de la geodésica.

**21.** Pruébese que  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$  a partir de  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] g_{\lambda\rho} = 0$ .

**22.** Demuéstrese la propiedad cíclica del tensor de Riemann a partir de  $\nabla_{[\mu} \nabla_\nu \nabla_{\lambda]} \phi = 0$ , con  $\phi$  un campo escalar arbitrario.

**23.** [Junio 2013] Demuéstrese para dimensión mayor o igual que tres que si  $R_{\mu\nu} = f g_{\mu\nu}$  entonces  $f$  es constante.

**24.** Un espacio-tiempo de dimensión dos tiene métrica

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2 g_{01} dt dx + g_{11} dx^2,$$

donde  $g_{\mu\nu}$  son funciones de  $t$  y  $x$ . Calcúlense las componentes del tensor de Riemann y del tensor de Ricci en términos del escalar de Ricci y de los coeficientes de la métrica.

**Ayuda.** De acuerdo con las simetrías del tensor de Riemann, éste sólo tiene una componente independiente, la  $R_{0101}$ , en términos de la cual se escriben todas las cantidades pedidas.

**25.** Sea un espacio-tiempo de dimensión  $D$  con métrica

$$ds^2 = \Omega^2 h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1, \quad (2)$$

donde  $\Omega$  es una función de las coordenadas  $x^\mu$  y  $h_{\mu\nu}$  es una métrica no plana. Calcúlense sus símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci en términos de  $\Omega$  y de las mismas cantidades para  $h_{\mu\nu}$ .

Nota. Las expresiones finales para las distintas cantidades pueden consultarse en cualquier libro. Ver por ejemplo el texto de Wald. A las métricas de este tipo se les llama conformemente equivalentes. Si  $h_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski, la métrica (2) se dice conformemente plana. Toda métrica  $ds_2^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$  en dimensión dos es conformemente plana pues existe un cambio de coordenadas  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x)$  tal que  $ds_2^2 = \Omega^2(\tilde{x}) \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu$ . El único requisito es que  $g_{\mu\nu}$  sean funciones reales analíticas de  $x^\mu$ .

**26.** Considérese una métrica diagonal

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ \neq 0 & \text{si } \mu = \nu \end{cases},$$

cuyos coeficientes no nulos  $g_{\mu\mu}(x)$  son funciones de todas las coordenadas  $x^\rho$ . Calcúlense sus símbolos de Christoffel.

**27.** Una obtención alternativa a la presentada en clase de la ecuación para la desviación geodésica

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \xi^\rho \quad (3)$$

es la siguiente. Sea  $x^\mu(\tau, s)$  una familia de geodésicas, con  $\tau$  un parámetro afín a lo largo de las distintas geodésicas que forman la familia y  $s$  el parámetro que distingue entre ellas. Es decir,

$$u^\mu = \frac{\partial}{\partial \tau} x^\mu(\tau, s), \quad \xi^\mu = \frac{\partial}{\partial s} x^\mu(\tau, s).$$

La condición

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial s} x^\mu(\tau, s) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial \tau} x^\mu(\tau, s) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \xi^\mu(\tau, s) = \frac{\partial}{\partial s} u^\mu(\tau, s)$$

se escribe en forma covariante

$$u^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu - \xi^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = [u, \xi]^\mu = 0. \quad (4)$$

a) Usando (4) y que las geodésicas satisfacen  $u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = 0$ , demostrar que

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\tau^2} = (u^\alpha \nabla_\alpha)^2 \xi^\mu$$

está dada por el lado derecho de la ec. (3).

b) Demostrar que si, en lugar de la conexión de Levi-Civita, se utiliza una conexión afín no simétrica, la ecuación (4) no es cierta.

**28.** Demuéstrese que, al variar la métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ , los símbolos de Christoffel cambian de acuerdo con

$$\delta \Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\nabla_\nu \delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\lambda \delta g_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\nu\lambda}).$$

**29.** [Febrero 2016] Una partícula con masa se mueve en un campo gravitatorio descrito en coordenadas locales  $(t, x, y, z)$  por la métrica

$$ds^2 = -e^{-2ax/c^2} c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Escríbanse las ecuaciones de las geodésicas usando como parámetro afín su tiempo propio  $\tau$ . Si su velocidad inicial es cero, es decir,  $dx/dt = dy/dt = dz/dt = 0$  en  $t = 0$ , calcúlese  $dx^2/d\tau^2$  en  $t = 0$ .

**30.** Una partícula con masa se mueve en una geometría

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + h(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5)$$

con  $fh = 1$ . La partícula sigue una órbita  $r = R = \text{const}$ ,  $\theta = \pi/2$ . Demuéstrese que su momento angular por unidad de masa  $L$  está dado por

$$L^2 = \frac{R^3 f'(R)}{2f(R) - R f'(R)},$$

Particularícese para el caso de Schwarzschild

$$f = h^{-1} = 1 - \frac{2m}{r}.$$

**31.** Considérese una **partícula en reposo** en una métrica estática arbitraria

$$ds^2 = -g_{00}(\mathbf{x}) dt^2 + h_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j.$$

Demuéstrese que su aceleración covariante es

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{D\tau} = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = \frac{c^2}{g_{00}} \Gamma^\mu_{00}.$$

El resultado obviamente depende del sistema de coordenadas elegido. Calcúlese su norma  $a^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$ , invariante bajo transformaciones de coordenadas. Particularícese para la métrica de Schwarzschild y razónese que la fuerza necesaria para que la partícula se mantenga en su órbita se hace infinita en  $r = 2m$ .

**32.** Considérese la métrica de Schwarzschild y un observador con coordenadas espaciales  $r = r_0$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = \phi_0$ . ¿Es un observador en caída libre?

**33.** [Septiembre 2016] Considérese el espacio-tiempo bidimensional

$$ds^2 = \frac{a^2}{x^2} (-dt^2 + dx^2), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad a = \text{const}.$$

(a) Demuéstrese que las ecuaciones de las geodésicas son

$$\dot{t} = kx^2 \Leftrightarrow \ddot{t} - \frac{2}{x} \dot{t} \dot{x} = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{x} (\dot{t}^2 + \dot{x}^2) = 0, \quad (7)$$

donde el punto indica derivada con respecto a un parámetro afín y  $k$  es una constante (cantidad conservada). Ecuéntrense a partir de ellas los símbolos de Christoffel.

(b) Demuéstrese que las geodésicas están dadas por

$$x^2 - (t - t_0)^2 = \pm R^2,$$

donde  $t_0$  y  $R$  son constantes reales. Ayuda: escribir la ec. (7) como

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} = 2 \quad (8)$$

e integrar esta última.

(c) Tómese  $t_0 = 0$ , calcúlese  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  y discútase el género de las geodésicas atendiendo al valor de  $R$ .

**34.** Considérese una sección ( $t = t_0, \theta = \pi/2$ ) de la geometría de Schwarzschild, de forma que la métrica en dicha sección toma la forma

$$ds_2^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\phi^2.$$

Encuéntrese una superficie en  $\mathbf{R}^3$  que tenga el mismo elemento de línea. Para ello tómese como punto de partida la métrica euclídea en coordenadas cilíndricas,

$$ds_3^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2,$$

y búsquese una superficie parametrizada por  $r$  y  $\phi$  con ecuaciones  $z = z(r)$ ,  $r = r$ ,  $\phi = \phi$  sobre la que la métrica  $ds_3^2$  se reduzca al elemento de línea  $ds_2^2$ . En caso de necesitar una condición de contorno, úsese  $z = 0$  para  $r = 2m$ . Con la ayuda de algún programa de manipulación simbólica (Maple, Mathematica, Reduce, etc.) hágase una gráfica de dicha superficie.

**35.** [Septiembre 2013] Considérese la geometría de Schwarzschild. Demuéstrese que en la proximidades del radio de Schwarzschild,  $r \sim R_{\text{Sch}} = 2m$  la métrica en las secciones  $(t, r)$  se reduce a la métrica de Rindler en coordenadas adecuadas.

**36.** Encuéntrese el cambio  $r = r(\rho)$  para el que la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

se escribe

$$ds^2 = -A(\rho) dt^2 + B(\rho) [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)].$$

Calcúlense  $A(\rho)$  y  $B(\rho)$ .

**37.** [Junio 2015] Un cuerpo con simetría esférica y masa  $M$  produce en su exterior un campo gravitatorio dado por ( $c = 1$ )

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

(1) Discútase si es posible que un fotón quede atrapado en una órbita circular de radio  $r = r_0 > 2GM$ .

(2) De ser el caso, determínese  $r_0$  y calcúlese el tiempo coordenado que tarda el fotón en completar una vuelta.

(3) Considérese ahora el caso de una partícula masiva y supóngase que tiene energía  $E$  por unidad de masa y momento angular  $L$  por unidad de masa dadas. ¿Es posible que se quede atrapada en una órbita circular?

(4) La métrica dada puede interpretarse como como una aproximación más refinada del campo gravitatorio newtoniano producido por un cuerpo de masa  $M$ ; por ejemplo, la Tierra. De acuerdo con los resultados de los apartados (1) y (2), ¿un fotón puede dar vueltas alrededor de la Tierra por la atracción gravitatoria que ésta ejerce sobre él?

**38.** [Junio 2013] Un fotón se mueve en el campo gravitatorio estático producido por un cuerpo esférico (métrica de Schwarzschild). El fotón puede quedarse atrapado en una órbita circular, coordenada radial constante.

(a) Calcúlese el radio de dicha órbita en términos del radio gravitatorio del cuerpo que produce el campo.

(b) Hállese el período de la órbita en el tiempo coordenado.

(c) Determínese el período de la órbita en el tiempo propio de un observador que se encuentra en un punto de dicha órbita.

**39.** [Septiembre de 2016] Considérense dos observadores en reposo en un campo gravitatorio dado por

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

donde  $\ell$  es una constante con dimensiones de longitud. El primero se encuentra en  $r_1 = a$ ,  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\phi_1 = 0$ ; y el segundo en  $r_2 = b$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ ,  $\phi_2 = 0$ , con  $b < a \ll \ell$ . El primero emite luz que viaja con  $\theta = \pi/2$  y  $\phi = 0$  y ésta es observada por el segundo. Calcúlese el desplazamiento que observa este último e indíquese si es hacia el infrarrojo o hacia el ultravioleta.

Nota. Ésta es la métrica de anti-de Sitter.

**40.** ... Algunos de vosotros me habéis preguntado en tutorías sobre las afirmaciones que se hacen en la película Interstellar, y en algunos libros de ciencia-ficción, sobre cómo transcurren los tiempos cuando se

aproxima uno a agujeros negros. Este problema y el que sigue pueden ayudarlos a discernir lo científico de lo demás. Insisto en lo dicho en clase: centráos en estudiar la asignatura (entender lo que es caída libre, lo que es una conexión, cómo se describe la curvatura, manejar índices, la importancia de los Killing, de las cantidades conservadas, etc. etc.) y luego ...

(a) Demuéstrese que el tiempo propio que un observador en caída libre en la dirección radial en la geometría de Schwarzschild tarda en alcanzar  $r = r_1$ , si inicialmente se encuentra en reposo en  $r = r_0 > 2m$ , es

$$\tau_{r_0 \rightarrow r_1} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0^3}{8m}} (\alpha_1 + \sin \alpha_1),$$

donde el ángulo  $\alpha_1$  es la solución entre 0 y  $\pi$  a la ecuación

$$r_1 = \frac{r_0}{2} (1 + \cos \alpha_1).$$

Este resultado prueba que el observador en caída libre tarda un tiempo finito en alcanzar el radio de Schwarzschild pues, en este caso  $r_1 = 2m$ . Nótese que este tiempo finito del que hablamos es el tiempo propio del observador, es decir el que mide él mismo.

(b) Como caso particular tómese  $r_1 = 0$ . Entonces se tiene  $\alpha_1 = \pi$  y

$$\tau_{r_0 \rightarrow 0} = \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{r_0^3}{8m}}.$$

Considérese el caso del Sol y supóngase que el observador parte de la superficie del mismo ( $r_0 = R_{\text{Sol}} \approx 7 \times 10^{10} \text{ cm}$ ). Pruébese que  $\tau_{R \rightarrow 0} \approx 30$  minutos.

Nota. El tiempo  $\tau_{r_0 \rightarrow 0}$  puede interpretarse como una estimación del tiempo de colapso gravitacional. En un cuerpo estable, a la fuerza gravitatoria se opone la presión interna del cuerpo, de sentido contrario. Si la fuerza gravitatoria es mayor, el equilibrio se rompe y se produce colapso hasta que la presión interna vuelve a igualar a la fuerza gravitatoria. Esta interpretación como tiempo de colapso gravitacional es un tanto formal pues no tiene en cuenta la forma de la métrica en el interior del cuerpo.

**41.** Considérese, en un campo gravitatorio de Schwarzschild, **un observador estático infinitamente alejado**, de forma que su coordenada  $r$  es constante pero muy grande. Como

$$-d\tau_\infty^2 \approx -dt^2 \left[ 1 + \left( \frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt} \right)^2 \right] = -dt^2 \quad \text{para } r \rightarrow \infty \text{ y } \frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt} = 0,$$

su tiempo propio  $\tau_\infty$  es proporcional al tiempo coordenado  $t$ . Este observador percibe la trayectoria de **un segundo observador en caída radial libre** como una función de  $\tau_\infty$ , que, de acuerdo con lo anterior, puede tomarse como el tiempo coordenado  $t$ . Para el segundo observador se tiene

$$E = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (9)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (\text{caída libre en dirección radial}), \quad (10)$$

$$E^2 = \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + 1 - \frac{2m}{r}, \quad (11)$$

con  $\tau$  su tiempo propio. Demuéstrese a partir de las ecs. (9) y (11) que

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r-2m}{2m} \quad \text{para } r \rightarrow 2m^+$$

Téngase en cuenta al hacerlo que  $r$  decrece según aumenta  $t$ . Pruébese que el tiempo que según el observador estático tarda el observador en caída libre en alcanzar  $r = 2m$  es infinito. Es decir, el observador estático nunca verá al observador en caída libre alcanzar el radio de Schwarzschild.

**42.** Sea la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \left(1 + a \sin [\omega(t-z)]\right) dx^2 + \left(1 - a \sin [\omega(t-z)]\right) dy^2 + dz^2, \quad (12)$$

con  $a \ll 1$ . Demuéstrese que un observador que tiene  $x, y, z$  fijos se encuentra en caída libre, es decir, se mueve según una geodésica de género tiempo. Nótese que el tiempo propio para dicho observador y el tiempo coordenado tienen el mismo lapso,  $d\tau_{\text{obs}} = dt$ .

Supóngase que el observador está en  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  y que se coloca un espejo en  $(x, y, z) = (L, 0, 0)$ . De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, ambos se encuentran en geodésicas de género tiempo. En un instante coordenado  $t_0$  el observador envía una señal luminosa al espejo, la cual lo alcanza en  $t_1$  y es reflejada. Cuando retorna al observador el tiempo transcurrido desde que éste envió la señal es  $\Delta t$ . Supóngase que  $L$  es tal que  $2L/c$  es mucho menor que  $1/\omega$ , por lo que durante el proceso de emisión, reflexión y absorción la métrica puede tomarse constante. Demuéstrese que, a primer orden en  $a$ , para una señal luminosa que viaja con  $y = z = 0$ ,  $\Delta t$  está dado por

$$\Delta t \approx 2L \left(1 + \frac{a}{2} \sin \omega t_0\right).$$

Comentario. La métrica (12) es un ejemplo muy sencillo de onda gravitacional. El resultado establece que el tiempo  $\Delta t$  medido por el observador (pues su lapso de tiempo propio es igual al coordenado) depende de forma oscilatoria del instante de tiempo en que se produce la emisión. La cantidad  $c\Delta t/2$  puede interpretarse como distancia entre el observador y el espejo medida a través de la propagación de la luz, de forma que la onda gravitacional descrita por la métrica se manifiesta mediante fluctuaciones en la distancia. En febrero de 2016 se anunció la detección experimental de ondas gravitacionales por la colaboración LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory). El experimento consiste en medir las fluctuaciones en la distancia debidas a una métrica de tipo onda gravitacional analizando los patrones de interferencia para la luz en un interferómetro. Las ondas gravitacionales detectadas se produjeron cuando dos agujeros negros, con masas aproximadas de 29 y 36 veces la del Sol, colisionaron hace 1300 millones de años para formar un agujero negro de mayor masa. Como resultado de la colisión se emitió en forma de ondas gravitacionales una energía equivalente a tres veces la masa solar.

**43.** Considérese la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - m^2 r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

con  $m$  un parámetro con dimensiones de masa.

(a) Demuéstrese que la trayectoria de un fotón satisface

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^2 (1 - m^2 r^2) (\mu^2 r^2 - 1),$$

con  $\mu$  una constante positiva. Identifíquese  $\mu$  en términos de la energía y del momento angular del fotón.

(b) A partir de esta ecuación, pruébese que en esta geometría los rayos de luz se mueven según elipses. Calcúlense sus semiejes mayor y menor.

#### 44. La métrica de Reissner-Nordström

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein con  $\Lambda = 0$  y  $T_{\mu\nu}$  el producido por un campo electromagnético. Describe el campo gravitatorio de una estrella cargada con simetría esférica. En unidades adecuadas, los parámetros  $m$  y  $q$  son proporcionales a la masa y la carga de la estrella. Supóngase que  $m^2 > q^2$ .

(a) Demuéstrese que para  $q \neq 0$  una partícula sin carga que cae radialmente no puede alcanzar  $r = 0$ . Compárese esta situación con el caso de la métrica de Schwarzschild del ejercicio anterior.

(b) Determinése la coordenada  $r_{\min}$  del punto de máximo acercamiento para una partícula masiva que inicialmente se encuentra en reposo en el infinito. Pruébese que  $r_{\min} < r_-$ , donde  $r_-$  es la menor de las dos raíces de la ecuación  $1 - 2m/r + q^2/r^2 = 0$ .

#### 45. Considérese el espacio-tiempo de Vaidya de tipo entrante o “ingoing”, (también llamado avanzado o “advanced”)

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M(v)}{r}\right] dv^2 + 2dv dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (13)$$

En esta expresión  $M(v)$  es una función que depende sólo de la coordenada  $v$ .

(1) Obténgase las ecuaciones de las geodésicas usando  $L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  como lagrangiana efectiva.

(2) A partir de dichas ecuaciones encuéntrense los símbolos de Christoffel no nulos.

(3) Demuéstrese que la única componente no nula del tensor de Ricci es

$$R_{vv} = \frac{2M'(v)}{r^2},$$

donde la prima denota derivada con respecto a  $v$ .

(4) Considérense geodésicas radiales, es decir con  $\theta$  y  $\phi$  constantes. Demuéstrese que

(4a) si además  $v = \text{const}$  las geodésicas son de tipo luz y no puede haber geodésicas de tipo tiempo,

(4b) si  $v$  no es constante pero satisface

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2M(v)}{r}\right] \quad (14)$$

son también geodésicas de tipo luz.

(5) Supóngase que para una  $M(v)$  la solución de la ecuación (14) es la función  $r = r_0(v)$ . Pruébese que entonces  $M(v)$  está dada por

$$M(v) = \frac{1}{2} r_0(v) [1 - 2 r'_0(v)] .$$

(6) Obviamente la forma de  $r_0(v)$  no puede ser determinada si no se sabe la de  $M(v)$  y al contrario. Sin embargo, sí que puede estudiarse cómo se comportan las familias (o congruencias) de geodésicas radiales nulas en un entorno de la singularidad  $r = 0, v = 0$ . Para ello se supone una solución  $r_0(z)$  y se hace el cambio de  $z = r + r_0(v)$ . La cantidad  $z$  puede entenderse como lo que se desvía la geodésica  $r(v)$  de la dada  $r_0(v)$ . Pruébese que la ecuación (14) toma la forma

$$[r_0(v) + z] \frac{dz}{dv} + z \left[ r'_0(v) - \frac{1}{2} \right] = 0 . \quad (15)$$

(7) Supóngase que  $r_0 \sim 2\mu v^n$ , con  $\mu > 0$  constante y  $n > 1$  real, que corresponde a una geodésica bien definida según se aproxima ésta a la singularidad. Supóngase que la desviación  $z$  es pequeña, es decir,  $r_0 \gg |z|$ . Entonces el término  $zz'$  en la ecuación (15) puede despreciarse. Pruébese que la solución a la ecuación diferencial que queda es

$$z \sim \frac{C}{v^n} \exp \left[ - \frac{1}{4\mu(n-1)v^{n-1}} \right] ,$$

con  $C$  una constante arbitraria. Nótese que  $z \rightarrow 0$  para  $v \rightarrow 0$ , por lo que  $r \rightarrow 0$  si  $v \rightarrow 0$

**Nota.** La métrica (13) puede entenderse de la siguiente manera. Si en la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

se hace el cambio

$$t = v - r - 2m \ln \left( \frac{r}{2M} \right) \Rightarrow dr = dv - \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}$$

se obtiene la de Vaidya con radio de Schwarzschild  $M$  constante. La métrica de Vaidya generaliza la de Schwarzschild al caso de un  $M$  que depende de la coordenada nula avanzada  $v$ . También puede hacerse el cambio

$$t = u + r + 2m \ln \left( \frac{r}{2M} \right) \Rightarrow dr = du + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}$$

y suponer que  $M$  depende de la coordenada nula retardada  $u$ . a la métrica que resulta se le llama métrica de Vaidya retardada.

**Lecturas complementarias.** Más propiedades sobre las geodésicas de tipo luz pueden encontrarse en

– Y. Kuroda, “Naked singularities in the Vaidya spacetime”, Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 63.

46. Considérese la métrica

$$ds^2 = -du dv + dx^2 + dy^2 + F(u, x, y) du^2 \quad (16)$$

donde se han introducido coordenadas  $u = t - z$  y  $v = t + z$ .

(a) Calcúlense los símbolos de Christoffel para una función arbitraria  $F$  de sus argumentos. Calcúlense el tensor de Ricci y la curvatura escalar.

(b) Como los coeficientes de la métrica no dependen de la coordenda  $v$ , el vector  $\xi = \partial_v$  es Killing. Calcúlese su género. Demuéstrese que  $\nabla_\mu \xi_\nu = 0$ .

(c) Resuélvase las ecuaciones de la geodésica para  $F = m^2(x^2 - y^2)$ , con  $m$  un parámetro con dimensiones de masa.

(d) Escribanse las ecuaciones de Einstein en vacío (sin constante cosmológica) y discútase si la función  $F$  del apartado anterior es solución de las mismas.

(e) Discutir el género del vector de Killing  $\xi = \partial_u$  para la función  $F$  del apartado (c).

(f) Búsquese una solución a las ecuaciones de Einstein con  $F$  una función de  $x^2 + y^2$ . Encuéntrese en este caso un tercer vector de Killing.

Nota. Las métricas del tipo (16) reciben el nombre de métricas *pp*.

47. [Septiembre 2013] Encuéntrense las funciones  $f(v)$  para las que la métrica

$$ds^2 = 2 du dv + f(v) dw^2 + 2 dw dz$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein en vacío. Discútase si la métrica resultante es no plana o se reduce a la euclídea mediante un cambio de coordenadas adecuado.

48. [Febrero 2016] Un espacio-tiempo está descrito en coordenadas locales  $(t, x, y, z)$  por la métrica ( $c = 1$ )

$$ds^2 = -[dt + f(x) dx]^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

con  $f(x)$  función de  $x$ . Discútase si se trata de un espacio-tiempo plano. ¿Existen coordenadas en las que la métrica toma la forma de Minkowski.

49. [Septiembre 2016] Determínese la función  $f(z)$  para que

$$ds^2 = f^2(z) (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

sea solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (17)$$

Determínese el signo de  $\Lambda$ .

50. [Febrero 2016] Considérese una métrica dada por

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a} dx^2 + t^{2b} dy^2 + t^{2c} dz^2,$$

con  $a, b, c$  reales. Calcúlense las condiciones que deben satisfacer  $a, b$  y  $c$  para que sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. ¿Existen soluciones para  $a, b$  y  $c$  enteros?

**51.** Calcúlese los símbolos de Christoffel y el tensor de Ricci y resuélvanse las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica ( $\Lambda \neq 0$  y  $T_{\mu\nu} = 0$ ) para una métrica

$$ds^2 = r^2 (dx^2 + dy^2) - 2du dr + H(r) du^2, \quad -\infty < x, y, u < \infty, \quad r > 0.$$

**52.** [Junio 2014] Una distribución de materia tiene tensor energía-momento dado por

$$T^t_t = \rho, \quad T^r_r = T^\theta_\theta = T^\phi_\phi = p,$$

con  $\rho$  y  $p$  constantes. Dicha distribución produce un campo gravitatorio con métrica

$$ds^2 = -dt^2 + h(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Resuélvanse las ecuaciones de Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ . Compruébese explícitamente que  $T_{\mu\nu}$  es conservado.

**53.** [Junio 2015] Considérese una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  la métrica se escribe

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + h(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (18)$$

donde

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

En estas coordenadas el tensor energía-momento de la distribución está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}.$$

con  $u^\mu$  el vector

$$u_\mu = (-\sqrt{f}, 0, 0, 0)$$

y  $\rho$  y  $p$  escalares que pueden depender de las cuatro coordenadas  $t, r, \theta$  y  $\phi$ . Las funciones  $f$  y  $h$  **NO** son las de la métrica de Schwarzschild, pues el lado derecho de las ecuaciones de Einstein no es cero ya que  $T_{\mu\nu} \neq 0$ . Supóngase que la métrica es regular en  $r = 0$ .

(1) Encuéntrense las condiciones que deben satisfacer  $\rho$  y  $p$  para que  $T^{\mu\nu}$  sea conservado.

(2) En lo que sigue tómese

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}, \quad p = \begin{cases} p(r) & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases},$$

con  $\rho_0$  una constante. A partir de las componentes  $tt$  y  $rr$  de las ecuaciones de Einstein determínese  $h(r)$  para  $r < R$ .

(3) Determínese la ecuación diferencial que satisface  $p(r)$ .

(4) Supóngase adicionalmente que  $GR^2 \ll 1$  y que  $p(r) \ll \rho_0$ . Determínese  $p(r)$ .

Aunque no es necesario para resolver el problema, la distribución de materia dada por este  $T_{\mu\nu}$  es la de un fluido en el que un elemento de volumen en  $x^\mu$  tiene densidad  $\rho(x^\mu)$  y ejerce presión  $p(x^\mu)$  en cualquier dirección.

**54.** Un campo gravitatorio está dado por la métrica ( $c = 1$ )

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (19)$$

donde  $H$  es constante. Encuéntrese la forma general de todos sus vectores de género tiempo. El tensor energía-momento de un campo escalar  $\phi$  en un campo gravitatorio descrito por una métrica  $g_{\mu\nu}$  es

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[ g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \phi) (\partial_\beta \phi) + V(\phi) \right],$$

donde  $V(\phi) \geq 0$  es el potencial del campo escalar. Discútase si para la métrica dada en la ec. (19) se satisface la condición  $T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu > 0$ , con  $v^\mu$  un vector arbitrario de género tiempo.

**55.** Considérese un espacio-tiempo de dimensión 5 (una dimensión temporal y cuatro espaciales) con métrica

$$ds_5^2 = e^{2A(w)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dw^2, \quad (20)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski en 4 dimensiones y  $w$  es la cuarta dimensión espacial. Demuéstrese que las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda \neq 0$  y  $T_{\mu\nu} = 0$  se reducen a  $A'' = 0$ , donde la prima indica derivada con respecto a  $w$ . Determínese el signo de la constante cosmológica. ¿Qué ocurre sin  $\Lambda = 0$ ?

Sugerencia. Se puede resolver el problema en  $D$  dimensiones (una temporal y  $D - 1$  espaciales).

Lecturas complementarias. Esta solución fue propuesta en

– L. Randall, R. Sundrum: “A large mass hierarchy from a small extra dimension”, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370-3373 [arXiv:hep-ph/9905221]. El artículo empieza presentando la solución y se centra en estudiar sus implicaciones y aplicaciones al problema de la jerarquía de escalas. El tema tratado en él queda fuera del alcance del curso.

**56.** Considérese la métrica en cinco dimensiones

$$ds_5^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_3^2,$$

donde  $d\Omega_3^2$  es la métrica de la 3-esfera de radio unidad,

$$d\Omega_3^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad 0 \leq \psi, \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Encuéntrese una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa.

**57.** [Junio 2014] Considérense las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$  en tres dimensiones. Demuéstrese que cualquier solución tiene tensor de Riemann dado por

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}).$$

**58.** Encuéntrese una solución a las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones con constante cosmológica negativa  $\Lambda = -1/\ell^2$  y  $T_{\mu\nu} = 0$  de la forma

$$ds^2 = -f^2(r) dt^2 + \frac{dr^2}{h^2(r)} + r^2 [d\phi + N(r) dt]^2.$$

Solución. Basta proceder como en los casos vistos en clase. Es decir, se calculan los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y se resuelven las ecuaciones diferenciales que resultan de las de Einstein. Las expresiones para los coeficientes de la métrica son

$$f = h = \sqrt{-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2}} \quad N = -\frac{J}{2r^2}, \quad |J| \leq M\ell,$$

donde  $M$  y  $J$  son constantes de integración. Hay que tener cuidado con las operaciones, pues en este caso, al tener la métrica tres funciones, son más engorrosas.

Lecturas complementarias. Esta solución es conocida como el agujero negro en tres dimensiones. Fue propuesta en

– M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli: “The black hole in three dimensional space time”, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849-1851 [arXiv:hep-th/9204099].

**59.** La métrica más general estática con simetría cilíndrica en torno al eje  $z$  e invariancia boost en la dirección de  $z$  puede escribirse en la forma

$$ds^2 = e^{2A(\rho)} (-dt^2 + dz^2) + d\rho^2 + \rho^2 e^{2B(\rho)} d\theta^2, \quad 0 \leq \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (21)$$

El objetivo de este problema es encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein de este tipo.

i) Pruébese mediante cálculo directo que los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\begin{aligned} \Gamma_{t\rho}^t &= \Gamma_{z\rho}^z = A', \\ \Gamma_{tt}^\rho &= -\Gamma_{zz}^\rho = e^{2A} A', \quad \Gamma_{\theta\theta}^\rho = -e^{2B} (\rho + \rho^2 B'), \\ \Gamma_{\rho\theta}^\theta &= \frac{1}{\rho} + B', \end{aligned}$$

donde la prima indica derivada con respecto a  $\rho$ .

2i) Demuéstrese que las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$A'' + B'' + A'^2 + B'^2 + A'B' + \frac{A'}{\rho} + \frac{2B'}{\rho} + \Lambda = 8\pi G T_t^t = 8\pi G T_z^z, \quad (22)$$

$$A'^2 + 2A'B' + \frac{2A'}{\rho} + \Lambda = 8\pi G T_\rho^\rho, \quad (23)$$

$$2A'' + 3A'^2 + \Lambda = 8\pi G T_\theta^\theta. \quad (24)$$

Calcúlese para ello el tensor y el escalar de Ricci y substitúyanse en las ecuaciones de Einstein. Nótese que en (22)-(24) hay un índice arriba y otro abajo.

En los siguientes apartados **vamos a buscar soluciones con  $T_{\mu\nu} = 0$  y  $\Lambda \neq 0$**  que en la proximidad del eje  $z$  sean localmente planas, por lo que exigiremos la condición de contorno

$$A(0) = 0. \quad (25)$$

3i) Utilizando las ecuaciones (23) y (24), obténgase  $A''$ ,  $B'$  y  $B''$  en términos de  $A'$  y compruébese que la ecuación (22) se satisface para toda  $A'$ . De  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0$  se sigue que  $R = 4\Lambda$ . A partir de la expresión para el escalar de Ricci en términos de  $A$ ,  $B$  y sus derivadas y de la ecuaciones (23) y (24) compruébese que efectivamente es así para toda  $A'$ .

- 4i) El anterior apartado implica que basta con resolver las ecuaciones (23) y (24). Encuéntrese su solución para  $\Lambda > 0$  y estudiéese su límite  $\Lambda \rightarrow 0$ .

Solución. De (24) se sigue que

$$A(\rho) = \frac{1}{3} \ln \left[ \cos^2 \left( \frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \rho + c_0 \right) \right] + c_1,$$

con  $c_0$  y  $c_1$  constantes de integración. Haciendo el cambio de coordenadas  $t \rightarrow te^{-c_1}$  y  $z \rightarrow ze^{-c_1}$ , la constante  $c_1$  desaparece de la métrica. Dicho cambio equivale a modificar las escalas de  $t$  y  $z$ , que en el caso que nos ocupa es irrelevante. Así pues, podemos tomar  $c_1 = 0$ . Tras imponer las condición de contorno (25) se obtiene  $c_0 = 0$ . En resumen,

$$e^{2A(\rho)} = \cos^{4/3} \left( \frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \rho \right).$$

Utilizando esta expresión para  $A(\rho)$  en (23) e integrando se obtiene

$$e^{2B(\rho)} = \frac{4c_2}{3\Lambda\rho^2} \cos^{-2/3} \left( \frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \rho \right) \sin^2 \left( \frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \rho \right),$$

donde  $c_2 > 0$  una constante de integración. Es claro que

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + c_2 \rho^2 d\theta^2 \quad \text{para } \Lambda \rightarrow 0. \quad (26)$$

Si  $\Lambda = 0$ , y puesto que  $T_{\mu\nu} = 0$ , no hay fuente alguna en todo el espacio-tiempo que genere un campo gravitatorio. Cabe esperar que la métrica sea la de Minkowski y tomar  $c_2 = 1$ .

- 5i) Resuélvase las ecuaciones (23) y (24) para  $\Lambda < 0$ .

Solución. Las mismas expresiones que en (4i) cambiando  $\Lambda$  por  $|\Lambda|$  y sin y cos por sinh y cosh.

**Lecturas complementarias.** La soluciones axisimétricas estáticas en vacío fueron encontradas por T. Levi-Civita en un artículo publicado en Rend. Acc. Lincei **18** (1919) 101. Su generalización a constante cosmológica no nula fue obtenida en

– B. Linet, “The static, cylindrically symmetric strings in general relativity with cosmological constant”, J. Math, Phys, **27** (1986) 1817-1818.

**60.** Considérese una distribución de materia estática uniforme cilíndrica de radio  $\rho_0$  y longitud infinita a lo largo de un eje que tomaremos como eje coordenado  $z$ . Su tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  tiene como únicas componentes distintas de cero

$$T^t_t = T^z_z = \begin{cases} -\epsilon & \text{si } \rho < \rho_0 \\ 0 & \text{si } \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (27)$$

con  $\epsilon$  una constante positiva. Se quiere encontrar el gravitatorio producido por esta distribución dentro y fuera de la misma. Para ello se buscan métricas del tipo (21), que por conveniencia repetimos aquí:

$$ds^2 = e^{2A(\rho)} (-dt^2 + dz^2) + d\rho^2 + \rho^2 e^{2B(\rho)} d\theta^2, \quad 0 \leq \rho, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Sus símbolos de Christoffel son los del apartado (i) del problema anterior y sus ecuaciones de Einstein toman la forma (22)-(23). En el caso que nos ocupa ahora se tiene  $\Lambda = 0$  y  $T_{\mu\nu}$  dado por (27).

Primero encontraremos las soluciones en el interior ( $\rho < \rho_0$ ) y en el exterior ( $\rho > \rho_0$ ) y seguidamente las uniremos mediante condiciones de frontera ( $\rho = \rho_0$ ) adecuadas. Usaremos la notación  $r$  para  $\rho < \rho_0$  y reservaremos  $\rho$  para  $\rho > \rho_0$ .

- i) Considérese  $r := \rho < \rho_0$ . Como condición de contorno en  $r = 0$  tómese  $B(0) = 0$ . Demuéstrese que la única solución es

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + 8\pi G\epsilon \sin^2\left(\frac{r}{\sqrt{8\pi G\epsilon}}\right) d\theta^2, \quad r < \rho_0 \quad (28)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal de Newton.

En el exterior se tiene  $\Lambda = T_{\mu\nu} = 0$ , por lo que tomaremos como métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + c_0^2 \rho^2 d\theta^2, \quad \rho > \rho_0, \quad (29)$$

con  $c_0$  una constante por determinar. Hacemos aquí dos comentarios. Primero, además de (29) existe otra solución, para la que puede procederse de la misma forma y que conduce al mismo resultado final pero no nos ocuparemos de ella aquí. Segundo, a diferencia del caso del problema anterior, ahora hay una distribución de materia que crea un campo gravitatorio en su entorno y no puede concluirse (como se hizo entonces) que  $c_0$  sea igual a 1.

- 2i) Para unir las soluciones (28) y (29) en la frontera  $r = \rho = \rho_0$  se imponen las dos siguientes condiciones:

(I) La métricas inducidas en la frontera por las métricas interior y exterior coinciden, modo una transformación de coordenadas.

(II) La curvatura extrínseca de la superficie frontera o es continua o presenta una discontinuidad relacionada con el valor del tensor energía-impulso sobre ella.

En nuestro caso, como coordenadas en la frontera pueden tomarse  $t$ ,  $z$  y  $\theta$ . Las métricas inducidas en ella por las métricas interior y exterior son respectivamente (28) con  $r = \rho_0$  y (29) con  $\rho = \rho_0$ . La condición (I) exige que ambas sean iguales, salvo quizás un cambio de coordenadas.

Para entender la condición (II) observamos que la superficie frontera admite:

- Un vector unitario  $n_{(\text{in})}^\alpha = \delta^\alpha_r$  de género espacio,  $n_{(\text{in})}^2 = 1$ , normal a la misma con respecto a la métrica interior (o *in*).
- Un vector unitario  $n_{(\text{out})}^\alpha = \delta^\alpha_\rho$  de género espacio,  $n_{(\text{out})}^2 = 1$ , normal a la misma con respecto a la métrica exterior (o *out*).

En términos de estos vectores unitarios, la curvaturas extrínsecas  $K_{ab}^{(\text{in})}$  y  $K_{ab}^{(\text{out})}$  de la frontera con respecto a las métricas interior y exterior están dadas por

$$K_{ab}^{(\text{in,out})} = \nabla_a^{(\text{in,out})} n_b^{(\text{in,out})}, \quad a, b = t, z, \theta.$$

La condición (2) establece en el caso de continuidad que

$$\nabla_a^{(\text{in})} n_b^{(\text{in})} = \nabla_a^{(\text{out})} n_b^{(\text{out})} \quad \text{sobre } r = \rho = \rho_0. \quad (30)$$

Demostrar que las condiciones (1) y (2), ésta última en su forma (30), implican que

$$c_1 = \cos\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{8\pi G\epsilon}}\right).$$

La masa por unidad de longitud  $\kappa$  (o densidad lineal de energía) puede definirse como la integral de la densidad de energía sobre el volumen propio de la fuente. Es decir

$$\kappa = \int_0^{\rho_0} r e^{B(r)} dr \int_0^{2\pi} d\theta \epsilon = \frac{1}{4G} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\rho_0}{\sqrt{8\pi G \epsilon}} \right) \right].$$

La métrica exterior es, por tanto,

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + (1 - 4G\kappa)^2 \rho^2 d\theta^2, \quad \rho > \rho_0, \quad (31)$$

Las secciones transversales  $(\rho, \theta)$  son conos, pues puede introducirse una coordenada angular  $\phi = (1 - 4G\kappa) \theta$  que toma valores en el intervalo  $0 \leq \phi < 2\pi(1 - 4G\kappa)$ . Al ángulo  $\delta = 8\pi G\kappa$  que le falta al cono para transformarse en un plano se le llama ángulo de déficit.

**Nota 1.** El límite  $\rho \rightarrow 0$  tiene sentido si se mantiene el cociente  $\rho_0/\sqrt{8\pi G\epsilon}$ , y por tanto  $\kappa$ , constante. De no ser así, no tiene sentido tomar dicho límite. Una distribución de materia lineal de radio despreciable ( $\rho_0 \rightarrow 0$ ) con densidad lineal de energía  $\kappa$  es conocida en la literatura con el nombre de cuerda cósmica. El resultado (31) establece que la métrica en las secciones transversales a la cuerda es cónica.

**Nota 2.** La curvatura extrínseca que aparece en la condición (II) se define de la siguiente forma. Una superficie  $\Sigma$  se dice de género espacio, respectivamente tiempo, si admite un vector perpendicular  $n^\mu$  en todo punto de la misma de género tiempo, respectivamente espacio. Supóngase que  $y^a$  son coordenadas sobre la superficie en cuestión. La métrica  $g_{\alpha\beta}$  induce sobre  $\Sigma$  una métrica  $h_{ab}$  dada por

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}.$$

Cualquier tensor siempre puede proyectarse sobre la superficie  $\Sigma$ , siendo la cantidad que realiza dicha proyección

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \pm n^\alpha n^\beta,$$

donde el signo  $+$  es para superficies de género espacio y el  $-$  para superficies de género tiempo. La curvatura extrínseca de la superficie  $\Sigma$  se define entonces como

$$K_{ab} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} \nabla_\alpha^{(g)} n_\beta.$$

### Lecturas complementarias.

- W. A. Hiscock, “Exact gravitational field of a string”, Phys. Rev. **D31** (1985) 3288-3290. La confección de este ejercicio sigue la línea de argumentación de esta referencia.
- A. Vilenkin, “Gravitational field of vacuum domain walls and strings”, Phys. Rev. **D23** (1981) 852-857. Usando una aproximación débil, su autor obtuvo en este artículo por primera vez el campo gravitatorio cónico producido por una cuerda cósmica.