40. **(a)** Demuéstrese que el tiempo propio que un observador en caída libre en la dirección radial en la geometría de Schwarzschild tarda en alcanzar $r = r_1$, si inicialmente se encuentra en reposo en $r = r_0 > 2m$, es

$$\tau_{r_0 \to r_1} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{r_0^3}{8m}}\left(\alpha_1 + \sin\alpha_1\right),$$

donde el ángulo α_1 es la solución entre 0 y π a la ecuación

$$r_1 = \frac{r_0}{2}\left(1 + \cos\alpha_1\right).$$

Este resultado prueba que el observador en caída libre tarda un tiempo finito en alcanzar el radio de Schwarzschild pues, en este caso $r_1 = 2m$. Nótese que este tiempo finito del que hablamos es el tiempo propio del observador, es decir el que mide él mismo.

(b) Como caso particular tómese $r_1 = 0$. Entonces se tiene $\alpha_1 = \pi$ y

$$\tau_{r_0 \to 0} = \frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{r_0^3}{8m}}.$$

Considérese el caso del Sol y supóngase que el observador parte de la superficie del mismo ($r_0 = R_{\rm Sol} \approx 7 \times 10^{10}$cm). Pruébese que $\tau_{R\to 0} \approx 30$ minutos.

<u>Nota.</u> El tiempo $\tau_{r_0 \to 0}$ puede interpretarse como una estimación del tiempo de colapso gravitacional. En un cuerpo estable, a la fuerza gravitaroria se opone la presión interna del cuerpo, de sentido contario. Si la fuerza gravitatoria es mayor, el equilibrio se rompe y se produce colapso hasta que la presión interna vuelve a igualar a la fuerza gravitatoria. Esta interpretación como tiempo de colapso gravitacional es un tanto formal pues no tiene en cuenta la forma de la métrica en el interior del cuerpo.

(a) La trayectoria (radial) que sigue el observador tiene $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \text{const.}$, $t = t(\tau)$ y $r = r(\tau)$, con

$$E = f(r)\,\dot{t} \quad , \quad f(r) = 1 - \frac{2m}{r},$$

constante del movimiento. La otra constante es trivialmente cero, pues $L = r^2\dot{\phi} = 0$. La condición $\dot{x}^2 = -1$ toma entonces la forma

$$-f(r)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} = -1 \iff E^2 = \dot{r}^2 + f(r) \qquad (1)$$

El observador se encuentra inicialmente en reposo, es decir, con $\dot{r}(0) = 0$, en $r(0) = r_0$, de forma que la constante puede determinarse por su valor en el origen,

$$E^2 = f(r_0) = \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)$$

De la ec. (1) se sigue que

$$1 - \frac{2m}{r_0} = \dot{r}^2 + 1 - \frac{2m}{r} \iff \dot{r}^2 = 2m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{2m\,\frac{r_0 - r}{r\,r_0}}$$

Nos quedamos con el signo negativo, pues r decrece con τ. Para integrar

$$\tau_{r_0 \to r_1} = \int_{r_0}^{r_1} d\tau = -\sqrt{\frac{r_0}{2m}} \int_{r_0}^{r_1} dr \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$$

se hace el cambio de variable

$$r = \frac{r_0}{2}(1 + \cos\alpha) \implies dr = -\frac{r_0}{2}\sin\alpha\, d\alpha$$

que sugiere el enunciado. Los límites de integración pasan a ser

$$r_0 = \frac{r_0}{2}(1 + \cos\alpha_0) \implies 1 = \cos\alpha_0 \implies \alpha_0 = 0$$

$$r_1 = \frac{r_0}{2}(1 + \cos\alpha_1)$$

Se tiene entonces

$$\tau_{r_0 \to r_1} = \frac{r_0}{2}\sqrt{\frac{r_0}{2m}} \int_0^{\alpha_1} d\alpha\, \underbrace{\sin\alpha \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}}_{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha}$$

Reinsertando c,

$$c\tau_{r_0\to r_1} = \left(\frac{r_0^3}{8m}\right)^{1/2}\int_0^{\alpha_1} d\alpha\,(1+\cos\alpha) = \left(\frac{r_0^3}{8m}\right)^{1/2}(\alpha_1+\sin\alpha_1)$$

(b) Para $r_1=0$, $1+\cos\alpha_1=0$. Es decir $\alpha_1=\pi$ y

$$\tau_{r_0\to 0} = \frac{\pi}{c}\left(\frac{r_0^3}{8m}\right)^{1/2}$$

En el caso del Sol y para $r_0=R_\odot$

$$\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{GM_\odot}{c^2}\simeq 1.4\times10^3\,m \\ r=R_\odot\simeq 7.0\times10^8\,m \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau_{R_\odot\to 0}\simeq 1800\,s \simeq 30 \text{ minutos}$$

Nota. La integral

$$I=-\int_{r_0}^{r_1} dr\,\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}$$

puede calcularse de otras formas. Por ejemplo, mediante el cambio

$$r=r_0\sin^2\beta \Rightarrow dr=2r_0\sin\beta\cos\beta\,d\beta$$

Los límites de integración ahora son

$$r_0=r_0\sin^2\beta_0 \Rightarrow \beta_0=\frac{\pi}{2}$$

$$r_1=r_0\sin^2\beta_1$$

de forma que

$$I = -2r_0 \int_{\pi/2}^{\beta_1} d\beta \, \sin^2\beta = r_0 \int_{\beta_1}^{\pi/2} (1-\cos 2\beta) \, d\beta$$

$$= r_0 \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 \right)$$

Haciendo el cambio $2\beta_1 = \pi - \alpha_1$ se llega a

$$I = \frac{r_0}{2} (\alpha_1 + \sin\alpha_1) \, ,$$

que reproduce el resultado para $\tau_{r_0 \to r_1}$.

41. Considérese, en un campo gravitatorio de Schwarzschild, **un observador estático infinitamente alejado**, de forma que su coordenada r es constante pero muy grande. Como

$$-d\tau_\infty^2 \approx -dt^2\left[1+\left(\frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt}\right)^2\right] = -dt^2 \quad \text{para} \quad r\to\infty \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt}=0\,,$$

su tiempo propio τ_∞ es proporcional al tiempo coordenado t. Este observador percibe la trayectoria de **un segundo observador en caída libre** como una función de τ_∞, que, de acuerdo con lo anterior, puede tomarse como el tiempo coordenado t. Para el segundo observador se tiene

$$E=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}\,,$$

$$\frac{d\phi}{d\tau}=0 \ \ \text{(caída libre en dirección radial)}\,,$$

$$E^2=\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+1-\frac{2m}{r}\,,$$

con τ su tiempo propio. Demuéstrese a partir de las ecs. (2) y (4) que

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{r-2m}{2m} \quad \text{para} \quad r\to 2m^+$$

Téngase en cuenta al hacerlo que r decrece según aumenta t. Pruébese que el tiempo que según el observador estático tarda el observador en caía libre en alcanzar $r=2m$ es infinito. Es decir, el observador estático nunca verá al observador en caída libre alcanzar el radio de Schwarzschild.

La ec. (1) del problema 40 establece que para el observador en caída libre radial

$$\dot{r}^2 = E^2 - f(r) \iff \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}_{\displaystyle = \frac{E^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}} = E^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right) \qquad (2)$$

pues $\dot{t} = \dfrac{E}{f(r)}$

Nótese que hemos pasado de $\dot{r}=\dfrac{dr}{d\tau}$ a $\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dt}{d\tau}$ pues estamos interesados en el tiempo propio τ_∞ que mide el observador infinitamente alejado y $d\tau_\infty = dt$

De (2) se sigue que

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left[E^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]\frac{1}{E^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2$$

Al tomar la raíz cuadrada nos quedamos con el signo negativo pues $t = \tau_\infty$ crece según decrece r,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{E}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{E^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)}$$

$$= -\frac{1}{E}\,\frac{r-2m}{r}\sqrt{E^2-\frac{r-2m}{r}}$$

Para $r \to 2m$ por la derecha,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{E}\,\frac{r-2m}{2m}\sqrt{E^2} = -\frac{r-2m}{2m}$$

Integrando

$$dt = \frac{dr}{1-\frac{r}{2m}} \Rightarrow t = -2m\ln\left(1-\frac{r}{2m}\right) + \begin{matrix}\text{constante}\\ \text{integración}\end{matrix}$$

Para $r \to 2m^+$ el argumento del logaritmo tiende a cero por la derecha, con lo que $t \to \infty$.