UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I
MJRPlaza

Problemas de calificación A2

Recordatorio: La calificación A o de *evaluación continua* es de 0 a 3 puntos, como establece la Guía Docente. Consistirá en dos pequeños exámenes que contará cada uno hasta 1.5 puntos. Este es el segundo.

Abreviaturas empleadas. LC: librerías cargadas, tol: tolerancia

PARA SEGUNDO EXAMENCILLO
La fecha será el 6 de Febrero de 2017

1. • El péndulo que vimos en el laboratorio (cogemos $c = 0$ para evitar rozamiento) **no es**, de ninguna manera, un oscilador armónico (HO, de ahora en adelante). Lo sabemos porque la ecuación del péndulo es $\alpha'' + \dfrac{g}{l}\sin\alpha = 0$ mientras que la de un oscilador armónico es $\alpha'' + \dfrac{g}{l}\alpha = 0$. Ahora bien, cuando el péndulo realiza pequeñas oscilaciones sí que se comporta como un HO. Matemáticamente hablando es porque $\sin\alpha \simeq \alpha$ y $V = mgl\,(1 - \cos\alpha) \simeq mgl(1 - (1 - \alpha^2/2)) = mgl\alpha^2/2$. Aquí V denota la energía potencial del péndulo con origen de potenciales en el punto en que la lentejica puntual está en su posición más baja.

   Un HO tiene siempre período $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ sea la que sea su amplitud. Me pregunto si le pasa lo mismo al péndulo.

   Para contestar científicamente a esta pregunta (la contestación se ve a ojo, simplemente cogiendo el péndulo entre las manos y poniéndolo en movimiento) y a otas cuestiones más haga lo siguiente:

   LC: `with(plots); Digits:=12:;`

   1) **Dibujar soluciones en el mismo frame.** Coja el programa de valores iniciales del lab (no el de contorno) e integre numéricamente la ecuacion `diff(y(x),x$2)+sin(y(x))` con los valores iniciales $y(0) = 25^o, D(y)(0) = 0$. Recuerde que x denota el tiempo e $y(x)$ el ángulo medido desde la posición vertical anticlockwise. Dibuje con Maple la solución para x en $[0, 30]$, en color red. Es periódica, ya lo ve. Repita pero con condiciones $y(0) = 70^o, D(y)(0) = 0$ y color blue; con $y(0) = 120^o, D(y)(0) = 0$ y color green y finalmente con $y(0) = 177^o, D(y)(0) = 0$ y color cyan. Todas son periódicas. Junte los cuatro dibujos en el mismo frame con `display({p1,p2,p3,p4})`. Como he tomado $l/g = 1$, la variable x está medida en unidades de $\sqrt{l/g}$.

   Por favor, note que yo no quiero ver más que el dibujo, no el programa, sólo las cuatro trayectorias en el mismo frame con los colores que digo. Si no tiene impresora a color los pinta con pinturicas sobre el fichero pdf que sale de Maple.

   2) **Contestar.** A la vista de los dibujos obtenidos en el punto anterior elija sin ambigüedad una de las dos contestaciones siguientes: *el período es independiente de la amplitud* (como le pasa al HO) o bien conteste *el período no es independiente de la amplitud.*

   3) **Calcular** el período T de un péndulo simple que parte del reposo formando un ángulo de 175^o con la vertical. Diga tb cuántas veces es más grande T que el período del correspondiente HO. Tome otra vez $l/g = 1$. Se requiere cálculo numérico y un método de la secante, coja tol=10^{-10}. La contestación son dos números, de tantos dígitos como los que me permite esta tolerancia. Pero es importante que sepa usted que todos esos dígitos con los que damos T no

son exactos. Se usa un RK4 para integrar la ecuación y yo no he hablado de convergencia de este método. Para esta evaluación A2 dejémoslo como está.

4) Péndulo amortiguado. Considere la ecuación

`diff(y(x),x$2)+c*diff(y(x),x)+sqrt(g/l)*sin(y(x))`

(la ecuación es eso igualalado a 0, claro está) donde c es una constante positiva. Si $l = 1$ m, $g = 9.8$ m s^{-2}, $c = 0.5$ s^{-1}, $y(0) = 177^o$, i) calcular lo que tarda el péndulo, que parte del reposo, en alcanzar la posición $y = 0$. ii) Calcular lo que tarda en alcanzar $y = 0$ una segunda vez. Nuevamente es un cálculo numérico y un método de la secante (tol=10^{-10}). La respuesta, dos números con sus unidades. El segundo, menos exacto que el primero. Déjenlo y vale.

2. • Les recuerdo que el *efecto Marsaglia* o "Random numbers fall mainly in the planes" que exhiben los métodos de congruencias lineales usados para generar números pseudo aleatorios lo vimos en clase con el generador RANDU. Ahí se ve en 3-dimensiones espectacularmente: 15 hermosos planos equidistantes y paralelos entre sí de ecuaciones $9x-6y+z = m\,k$. Los puntos del espacio (x, y, z) son tres valores consecutivos obtenidos con RANDU y k es un entero de la secuencia $-5, -4, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9$. Si no lo recuerda está en *códigos modestos*.

   LC: `with(plots):`

   Un alumno me preguntó si seguían cayendo los puntos en planos aunque no se escogieran consecutivamente. Ahora se lo pregunto yo a ustedes. Haga pues cada uno usando Maple lo siguiente: Con RANDU, $a = 2^{16} + 3, m = 2^{31}$ y semilla `x[0]:=314159683`, genere 5000 puntos. Asegúrese de que `x[6]:=342008011` y `x[9]:=466613609`, píntelos via `pointplot3d` siguiendo la secuencia `data:=seq([x[i],x[i+2],x[i+3]],i=1..4900):`. Gire y gire el frame con paciencia. ¿Hay planos visibles en 3-dimensiones en este caso? Si ve planos pruebe a contar con el dedito los que salen, para hacerse una idea. Si no ve planos... hmmmm... no tengo solución para ese problema. Fuera de bromas. Eche una cuenta bien hecha y conteste sin ambigüedad a:

   a) La ecuación analítica de los planos es E y hay p planos. Notación a utilizar en E: la más sencilla es nombrar las variables por el orden consecutivo $x, y, z, u, v, w, \ldots$, con lo que los tres valores $(x[i], x[i+2], x[i+3])$ serán (x, z, u). Los planos obtenidos de ecuación E deben ir en las variables x, z, u. Son los que se ven con Maple girando pacientemente el frame.

   b) Misma cuenta mismo todo pero ahora con (x, z, v), o sea con

   `data:=seq([x[i],x[i+2],x[i+4]],i=1..4900);`.

   Aquí yo veo (es un decir!) p planos en dimensión $d \geq 3$, de ecuaciones E. Haga los cálculos que tenga que hacer para decirme los números p, d y escriba E (de tener el problema muchas soluciones escoja una solución sencilla. Yo he encontrado una sencilla).

   Por favor, si tiene problemas con la **notación** utilizada, pregúnteme en persona o via email.

   Estos experimentos de tomar números pseudoaleatorios no en el orden en el que van saliendo sino en otro distinto, es un recurso que se utiliza para obtener una secuencia de números más aleatoria que la original. Y lo he conseguido, aunque el resultado (los resultados a) y b)) siga siendo aleatoriamente malo. ¿Por qué digo que lo he conseguido? Pues porque los números caen ahora en más planos que antes y sucede que a veces esos planos están tan pegados unos a otros que cuando giro el cubo con Maple es como si los puntos estuvieran homogéneamente distribuidos al azar, sin correlación alguna. Yo he hecho el shuffle de una manera muy controlada, saltándome un número a lo más, ya lo han visto, pero noto que las propiedades de aleatoriedad mejoran. Claro que es un RANDU, y que por mucho que mejoren, hay poco que ofrecer. Imaginemos lo mismo pero con un buen generador en su lugar, que los hay, y que programamos al propio generador para que sea él quien seleccione aleatoriamente el siguiente número en el array. Pues miel sobre hojuelas, randomness on top on randomness. Este procedimiento es utilísimo en ordenadores que sólo admiten m's pequeñas.

Curioso: el párrafo anterior lleva pocos acentos en la i. Qué bien.

3. • Con Maple. Sea V la región sólida limitada superiormente por el cilindro parabólico $z = 4-y^2$ e inferiormente por el paraboloide elíptico $z = x^2+3y^2$. ¿Puede pintar V con Maple? Calcule el volumen de V. Hágalo de dos maneras: analíticamente -si sabe- o en su defecto pidiéndoselo a Maple, y por el método de Monte Carlo. El generador de números aleatorios es un Park&Miller reformado. Inicialmente este generador tomaba $a = 7^5 = 16807, m = 2^{31} - 1$, pero más tarde los propios creadores lo cambiaron (no sé si por las críticas de Marsaglia y otros matemáticos) por $a = 48271, m = 2^{31} - 1$. Este es el que vamos a utilizar en el ejercicio. Tire $N = 100, 1000$ y 10000 puntos para el problema. Escriba los intervalos de confianza de una, dos y tres sigmas (es un **cálculo de errores**).

   Asegúrese los siguientes números: las tres secuencias de números aleatorios entre 0 y 1 las llamaré u, v, w. La u es para la x, la v para la y y la w para la z del volumen pedido. Usando semillas `u[0]:=271828182: v[0]:=693147180: w[0]:=314159265` obtengo `u[4]=1069614350`, `v[8]=1907033923` y `w[16]=996236202`.

   Con este calibrado conteste a las preguntas de la última página. Tres cifras significativas son $0.345, 1.86, 6540$, etcétera.

4. • 1) Calcular exactamente (a mano sale, es muy sencillo) el área del cardioide $r = 2 - \cos\theta$ donde r y θ son las coordenadas polares del plano.

   Esto no me lo puedo callar. Note que he dicho 'el área' y no 'la área'. No se rían si 'la área' les suena raro. Los dobladores de películas que no leen (no son todos, claro está, pero son muchos) nos dicen continuamente 'la arma' y venga con 'la arma' y venga con 'la arma' hasta que uno ya hartito cambia a VO en inglés. Lo hubiera hecho antes! Por favor, si tiene usted un conocido que doble y cometa este error, dígaselo. Es una obrita de caridad. El arma blanca. El agua clara. Nunca la agua clara. ay!

   2) Dibujar con Maple el cardioide y encerrarlo en un rectángulo lo más ajustado posible, ajustadísimo. Sean l_1 y l_2 el largo y alto de este rectángulo. Llamaremos Abox al producto de ambos números.

   3) Con un Park&Miller ordinario que corresponde a $a = 7^5 = 16807, m = 2^{31} - 1$ y semillas `u[0]:=541288962: v[0]:=990147105:` obtengo `u[1]=702855642`, `u[2]=1734716594` `u[3]=1143803686`, etcétera y `v[1]=551613132`, `v[2]=275005425`, `v[3]=631369631`, y lo que siga. Ya sabe que son números uniformente distribuidos entre 0 y m. Usted sólo puede utilizar, manipulando adecuadamente, estas dos listas de números. Manipular quiere decir que si precisa números distribuidos entre $[-15, 9]$, por ejemplo, usted coge una de esas dos listas y la convierte en números dentro de su intervalo.

   Hecho esto generar $N = 1000$ (mil) números aleatorios uniformemente distribuidos en el cardioide citado (use los numeros u and v como quiera, tiene $1000 + 1000$) y me superpone el dibujo de los puntos (un poinplot en color=black) con el dibujo del cardioide. Dos dibujos en el mismo frame.

   4) Calcular el área del cardioide usando los números aleatorios descritos en el apartado 3) para $N = 1000$ y luego para $N = 100000$ (cien mil). Escriba los intervalos de confianza de una, dos y tres sigmas (es un **cálculo de errores**).

6 de Febrero de 2017

Examencillo A2 de Física Computacional

Nombre y Apellidos:

DNI y Firma:

La puntuación total es de 60 puntos, normalizables a 1.5 en la nota final.

Péndulo

1. [2 pt] Dibujo de cuatro colores sacado de un pdf exportado de Maple. Puede recortar y pegar (literalmente hablando) pero no calcar ni dibujar/esbozar de su puño y letra.

2. [1 pt] Rodee con un círculo la respuesta correcta:

   a) El período es independiente de la amplitud, como le pasa al HO.

   b) El período no es independiente de la amplitud.

3. [5+2 pt] Respuesta a 1.3:

   a) T es igual a

   b) T es   veces el período de un péndulo simple de igual longitud.

4. [5 pt] Respuesta a 1.4: El péndulo tarda   en llegar a la vertical y vuelve a la vertical otra vez pasados   .

Planos de RANDU

5. [5 pt] Tomada la secuencia de puntos de RANDU `data:=seq([x[i],x[i+2],x[i+3]],i=1..4900);` se ven con los ojos más de treinta planos. Ahora quiero la cuenta exacta echada con álgebra. Los planos tienen ecuación   y hay exactamente   planos.

6. [5 pt] Lo mismo pero con `data:=seq([x[i],x[i+2],x[i+4]],i=1..4900);`. Los planos tienen ecuación   y hay exactamente planos.

7. [0 pt] Si ha sacado ecuaciones de planos (o hiperplanos) en dimensión $d = 3, 4, 5, \ldots$ distintos a los anteriores este es el momento de ponerlos. Formato: dimensión, ecuación de los planos, y número de ellos. Si no ha sacado ninguno, no pasa nada, porque este apartado no tiene puntuación. Pero si sabe la contestación, póngala.

Volumen V de Cálculo I

8. [2+2 pt] El valor exacto del volumen es

   a) en punto flotante (cifras por defecto de Maple):

   b) en aritmética exacta:

9. [3 pt] Para $N = 100$, se obtiene que el volumen de MC es igual a , con error igual a .

   Los intevalos de confianza con una sigma (un error), dos y tres son, respectivamente,

10. [3 pt] Lo mismo que en la pregunta anterior pero para $N = 10000$.

11. [5 pt] A la vista del resultado anterior para $N = 10000$ se puede decir sin posibilidad de equivocarse que (conteste a) o b), pero no ambas)

    a) Se puede asegurar que tres cifras significativas del volumen son:

    b) No se sabe el volumen con tres cifras significativas pero se sabe con dos, que son:

El cardioide

12. [2 pt] El valor exacta del área en aritmética exacta es:

13. [4 pt] Las dimensiones del rectangulo ajustadísimo en formato $l_1 \times l_2$ (ejemplo: 7×8) son:

14. [5 pt] Tres líneas escritas de cómo ha calculado usted el área con números aleatorios, para que yo pueda repetirlo si quiero con mi ordenador. Si coge la secuencia u me lo dice, si la v me lo dice, si ambas me lo dice. Y las manipulaciones algebraicas que les hace también. Tenga en cuenta que yo ya he hecho los cálculos y sé lo que sale y lo que no. Añada el pdf del dibujo pedido en el apartado 2) del enunciado

15. [3 pt] Para $N = 1000$, se obtiene que el área del cardioide es igual a , con error (desviación standard) igual a .

    Los intevalos de confianza con una sigma (un error), dos y tres son, respectivamente,

16. [3 pt] Lo mismo que en la pregunta anterior pero para $N = 100000$.

17. [3 pt] A la vista del resultado para $N = 100000$ sólo se puede decir, sin posibilidad de equivocarse, y obtenido del cálculo con números aleatorios, que el área es . No sabemos más que estas (una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, diga lo que sea) cifras significativas.