UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I

Febrero-Junio de 2011

MJRPlaza

Compendio de Ecuaciones Diferenciales II y Métodos Matemáticos II

http://teorica.fis.ucm.es/docenteft1.html

Los libros de donde se toman los ejercicios están indicados entre corchetes, así [M&T] es Marsden&Tromba, [Str] Strauss, [Sne] Sneddon, [PA] Puig Adam, [E] Elsgoltz, [PAr] Pepe Aranda apuntes PDE, [W] Weinberger, [Za] Zauderer, [To] Tolstov, etc.

Esta recopilación de problemas se comenzó en el curso 2005-2006 y se continuó durante los cursos 2006-2007, 2007-2008, 2008-2009 y 2009-2010 cuando la asignatura se llamaba *Ecuaciones Diferenciales II* en la UCM. El año 2010-2011 se pasó a llamar *Métodos Matemáticos II*, pero no era la misma asigmatura: se habían suprimido temas del programa inicial y añadido otros de *Ecuaciones Diferenciales I*. Como no vale la pena hacer dos ficheros separados, uno hasta 2010 y otro después, reuno todos los problemas en el mismo. Que cada uno consulte los que le interesen.

INTRODUCCIÓN Y GENERALIDADES

1. [M&T, pg 447, 448] Encontrar la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto indicado

   (a) $x = u^2$, $y = u \sin e^v$, $z = \frac{1}{3} u \cos e^v$ en $(13, -2, 1)$

   (b) $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$

   (c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = 1/3, z = 0$

2. [Str, pg 5] For each of the following equations, state the order and whether it is nonlinear, linear inhomogeneous, or linear homogeneous; provide reasons.

   (a) $u_t - u_{xx} + 1 = 0$ (b) $u_t - u_{xx} + xu = 0$ (c) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$ (d) $u_{tt} - u_{xx} + x^2 = 0$

   (e) $iu_t - u_{xx} + u/x = 0$ (f) $u_x(1 + u_x^2)^{-1/2} + u_y(1 + u_y^2)^{-1/2} = 0$ (g) $u_x + e^y u_y = 0$

   (h) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1 + u} = 0$

3. [Str, pg 5] Show that the difference of two solutions of an inhomogeneous linear equation $Lu = g$ (L is a linear operator including derivatives) with the same g is a solution of the homogeneous equation $Lu = 0$

4. [Str, pg 5] Show that the functions $c_1 + c_2 \sin^2 x + c_3 \cos^2 x$ form a vector space. Find a basis of it. What is its dimension?

5. [Str, pg 5] Are the functions $1+x$, $1-x$, and $1+x+x^2$ linearly dependent or independent? Why?

6. Sea la superficie $x = t + s, y = -t + s^2, z = t + s^3$ dada en forma paramétrica. Demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3s^2 + 2s}{1 + 2s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3s^2 - 1}{1 + 2s}.$$

   Usando estas fórmulas comprobar que $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

7. [Sne, pg 47] Eliminate the constants a and b from the following equations:
   (a) $x^2 + y^2 + (z - b)^2 = a^2$
   (b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = 1$,
   (c) $z = (x + a)(y + b)$,
   (d) $2z = (ax + y)^2 + b$,
   (e) $ax^2 + by^2 + z^2 = 1$.

8. [Sne, pg 47] Eliminate the arbitrary function f from the equations:
   (a) $z = f(x^2 + y^2)$, a surface of revolution around the z axis,
   (b) $z = xy + f(x^2 + y^2)$,
   (c) $z = f\left(\dfrac{xy}{z}\right)$,
   (d) $z = f(x - y)$,
   (e) $f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN

9. [PA, pg 212] Hallar las superficies cuyo plano tangente en cada punto corta al eje z en un punto cuya ordenada es igual y de signo contrario a la ordenada del punto de contacto. Calcular la superficie que contiene a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1, z = 1$.

10. [E, pg 252] Dada la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$, hallar la superficie integral que pasa por la curva directriz $x = s, y = s^2, z = s^3$. *Solución*: la superficie del problema 6.

    ¿Por qué hay una singularidad en las derivadas parciales $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$ cuando $s = -1/2$ si la curva directriz es *smooth* en $s = -1/2$?, ¿de dónde viene tal singularidad?

11. [E, pg 284] Resolver las ecuaciones: a) $u_x + u_y + u_z = 0$, b) $xu_x + 2yu_y + 3zu_z = 4u$.

12. [PAr] Sea $u_y - 2yu_x = 2yu$. Hallar la solución que satisface los datos de Cauchy: i) $u(x, 1) = e^{-x}$, ii) $u(2y, y) = 0$, discutiendo la unicidad de las soluciones.

13. [PAr] Hallar la solución y estudiar la unicidad de $u_y + xu_x = -x^2e^{-y}$, $u(-1, y) = 0$.

14. [Str, pg 9] Solve $u_x + u_y + u = e^{x+2y}$ with $u(x, 0) = 0$

15. [PAr] Sea (E) la ecuación $t^2 u_t + u_x = 2xu$. Hallar la solución de (E) que cumple $u(x, 1) = f(x)$, estudiando su unicidad. En particular, si $f(x) = \sin^2 x$ en $[0, \pi]$ y 0 en el resto de $\mathbf{R}$, hallar $u(3, 1/2)$. Plantear un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

16. [PAr] Hallar (si se puede) la solución o soluciones de las siguientes ecuaciones que satisfacen cada uno de los datos de Cauchy que se indican:
    (a) $u_y + uu_x = 0$ con $u(x, 0) = x$, y luego con $u(0, y) = 0$,
    (b) $uu_y + xu_x = u$ con $u(x, 0) = 1$, y después con $u(0, y) = 1$,
    (c) $u_y + u_x = u^2$ con $u(x, 0) = x$, y luego con $u(x, x) = 1$.

17. [Str, pg 9] Solve the equation $yu_x + xu_y = 0$ with the condition $u(0, y) = e^{-y^2}$. In which region of the xy plane is the solution uniquely determined?

18. [Examen Jun07] Sea la ecuación
$$yu_y - xu_x = u + 2x$$
y los datos de Cauchy i) $u(x, 0) = -x$, ii) $u(x, 2) = 7x$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

19. [Examen Sep07]
$$\begin{cases} 2u_t + u_x = tu \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$
1) utilizando las características
2) con la transformada de Fourier.

20. [E, pg 252] Hallar las superficies ortogonales a las superficies de las siguientes familias: a) $z = axy$, b) $xyz = a$.

21. [Sne, pg 24] [Pfaffian Equations] Verify that the differential equation
$$(y^2 + yz)\,dx + (xz + z^2)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0$$
is integrable and find its primitive.

22. [Examen Jun06] Verificar que la ecuación diferencial
$$(y + a)^2\,dx + z\,dy - (y + a)\,dz = 0$$
(a es una constante) es integrable y encontrar su primitiva. ¿Cuál es el factor integrante?

23. [Examen Jun09] i) Calcular la constante a para que la ecuación de Pfaff
$$3y^2\,dx - axy\,dy + x^4\,dz = 0$$
sea integrable. ii) Resolver la ecuación para ese valor de a y hallar un factor integrante.

24. [E, pg 284] Es integrable la ecuación $(y^2 + z^2 - x^2)\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$ mediante una sola relación? Nota: se dice que una ecuación de Pfaff es integrable *mediante una sola relación* $U(x, y, z) = c$, si se satisface la condición $\mathbf{F} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$.

25. [E, pg 284] Integrar mediante una sola relación la ecuación

$$(y + 3z^2)\,dx + (x + y)\,dy + 6xz\,dz = 0.$$

26. [E, pg 284] Hallar las superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F} = (2xy - 3yz)\mathbf{i} + (x^2 - 3xz)\mathbf{j} - 3xy\mathbf{k}$. Si el campo hubiera sido $\mathbf{F} = (2xy - 3yz)\mathbf{i} + (x^2 - 3xz)\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k}$, ¿existirían tales superficies?

27. [E, pg 284] Lo mismo que en el ejercicio anterior pero ahora con el campo vectorial $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (3y - z)\mathbf{j} + (x - 2y)\mathbf{k}$.

28. [E, pg 284] Hallar las líneas vectoriales, las superficies vectoriales y las superficies ortogonales a las líneas del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$.

29. [Sne, pg 17] Find the orthogonal trajectories **on** the cone $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$ of its intersections with the family of planes parallel to $z = 0$.

30. [Sne, pg 15] Find the integral curves of the set of equations:

    (a) $\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$, (b) $\dfrac{a\,dx}{(b-c)yz} = \dfrac{b\,dy}{(c-a)zx} = \dfrac{c\,dz}{(a-b)xy}$,

    (c) $\dfrac{dx}{xz-y} = \dfrac{dy}{yz-x} = \dfrac{dz}{1-z^2}$, (d) $\dfrac{dx}{x^2(y^3-z^3)} = \dfrac{dy}{y^2(z^3-x^3)} = \dfrac{dz}{z^2(x^3-y^3)}$,

    (e) $\dfrac{dx}{x+z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z+y^2}$.

CLASIFICACIÓN Y REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA

31. La ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ya está escrita en su forma canónica. Sin embargo, admitiendo características complejas se puede demostrar que la solución general de esta ecuacion es $u = f(x + iy) + g(x - iy)$, donde f y g son funciones arbitrarias. Ver que esto es así.

    Comentario: A las soluciones de esta ecuación en cualquier dimensión se les denomina *funciones armónicas*.

32. [PAr] Escribir $u_{tt} + 2u_{xt} = 2$ en forma canónica y hallar su solución general. De los datos de Cauchy: i) $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, ii) $u(0, t) = 0, u_x(0, t) = t$, hay unos que determinan una única solución de la ecuación diferencial. Hállese en ese caso.

33. Decir de qué tipo es la *ecuación de Tricomi* $u_{yy} - yu_{xx} = 0$ en las diferentes regiones del plano, escribiendo en cada una de ellas su forma canónica.

Esta ecuación describe objetos moviéndose a velocidades supersónicas. Descubierta en 1923 cuando aún no había aviones que volaran más deprisa que el sonido, ha jugado un papel decisivo en el estudio de los vuelos supersónicos.

34. [Za, pg 151] Show that the equation

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 3u_x - u_y + 2u = 0$$

is of hyperbolic type. Determine its characteristics curves and bring it to the canonical form $u_{rs} + \cdots = 0$. Introduce the further transformation $u(r,s) = e^{pr+qs}\, w(r,s)$ and choose the constants p, q to eliminate the first derivative terms in the resulting canonical form.

35. [PAr] Sea (E) la ecuación

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x,y) \qquad \text{(E)}$$

con $A, B, \ldots, F$ constantes. Probar que si (E) no es parabólica un cambio de variables $u = e^{px+qy} w$ con p, q constantes adecuadas, lleva (E) a una ecuación (E*) en la que no existen derivadas de primer orden. ¿Para qué relación entre las constantes $A, \ldots, F$ no tiene (E*) término en w? Aplicar lo anterior para hallar la solución general de $u_{xy} + 3u_x + 2u_y + 6u = 1$. Probar que cualquier ecuación parabólica de coeficientes constantes o es resoluble o se puede escribir mediante cambios de variable en la forma $w_{ss} + D^* w_r = G^{**}(r,s)$ (como la del calor).

36. [Sne, pg 109] Reduce the equation

$$(n-1)^2 z_{xx} - y^{2n} z_{yy} = n y^{2n-1} z_y, \quad n = 1, 2, \ldots$$

to its canonical form, and find its general solution.

37. [Sne, pg 109] Reduce the equation

$$y^2 z_{xx} - 2xy z_{xy} + x^2 z_{yy} = \frac{y^2}{x} z_x + \frac{x^2}{y} z_y$$

to its canonical form, and hence solve it.

38. [W, pg 46 ó 50] Find the characteristics of

$$(\cos^2 x - \sin^2 x) u_{tt} + 2\cos x\, u_{xt} + u_{xx} + u$$

through the point (0,1). Nota: 0 es la x, 1 la t.

39. Dadas las ecuaciones
   (a) $x u_{xx} + y u_{yy} = 0$,
   (b) $(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2) u_x = 0$,
   (c) $\sin^2 x u_{xx} + \sin 2x u_{xy} + \cos^2 x u_{yy} = y$,

   encontrar sus dominios de elipticidad, hiperbolicidad o parabolicidad, y hallar sus formas canónicas.

40. [Examen Sep07] Calcular $u(x,t)$ sabiendo que $u_{tt} - 4u_{xx} = 16$ y que $u(0,t) = t, u_x(0,t) = 0$.

Sugerencia: Sale de muchas maneras... haciendo uso de D'Alembert, por Kovalevskaia, reduciendo a la forma canónica, etc.

SOLUCIONES DE EDO's MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

41. [Sim, pg 147] Use the expansion $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$ to find the power series for $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

a) by squaring b) by differentiating c) by dividing *à la rusa* 1 by $1-2x+x^2$.

42. [Sim, pg 83] The equation $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ is the special case of *Legendre's equation*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

corresponding to $p = 1$. It has $y_1 = x$ as an obvious solution. Find the general solution.

Ayuda: Por variación de la constante o usando la fórmula $\int dx\, \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}$, ya sabéis, de 'cómo sacar una solución a partir de otra conocida'.

43. [Sim, pg 83] The equation $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$ is the special case of *Bessel's equation*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

corresponding to $p = 1/2$. Verify that $x^{-1/2}\sin x$ is one solution over any interval including only positive values of x, and find the general solution.

44. [Sim, pg 83] Find the general solution of

$$y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$$

Ayuda: Encuentre a ojo una solución fácil y use la fórmula $\int dx\, \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}$ como ayuda para la otra.

45. [Sim, pg 83] If y_1 is a non-zero solution of equation $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ and $y_2 = u\,y_1$, where u is given by $\int dx\, \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int P\,dx}$, is the second solution, show by computing the Wronskian that y_1 and y_2 are linearly independent.

46. [Sim, pg 157] Find the general solution of $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ in terms of power series in x. Can you express this solution by means of elementary functions? Nosotros como Obama... *Yes, we can.*

47. [Sim, pg 157] Consider the equation $y'' + xy' + y = 0$.

a) Find the general solution $y = a_0\, y_1(x) + a_1\, y_2(x)$ with y_1, y_2 power series in x.

b) Use the ratio test (*criterio del cociente*) to verify that the two series y_1 and y_2 converge for all x, as the Theorem we saw asserts.

c) Can you recognize $y_1(x)$? Yes, we can. Use this fact to find the second independent solution by the method 'the use of a known solution to find another'

48. [Second order differential equations do not always have two-term recursion formulae. This example shows it] [Sim, pg 157] Verify that the equation $y'' + y' - xy = 0$ has a three-term recursion formula, and find its series solution that satisfy (six terms at least... you can use Maple) a) $y(0) = 1, y'(0) = 0$ b) $y(0) = 0, y'(0) = 1$

    We mentioned in the lectures a Theorem that guarantees that both series converge for all x. Notice how difficult this would be to prove by working with the series themselves.

    Eso también le pasa a $\tan(x)$, que sacar el radio de convergencia de su serie de potencias directamente de los coefficientes es difícil.

49. [Sim, pg 158] Solutions of *Airy's equation* $y'' + xy = 0$ are called *Airy's functions* and have applications to the theory of diffraction. Also in Quantum Physics describes a nonrelativistic particle moving in a uniform field. There are many references about Airy functions, one 'Airy functions and applications to Physics' by O. Vallée and M. Soares, Imperial College Press, 2004. Algunos capítulos se pueden consultar on line.

    a) Find the Airy functions in the form of power series, and verify directly that these series converge for all x.

    b) Use the result in a) to write down the general solution of $y'' - xy = 0$ without calculation.

50. [Sim, pg 158] *Chebyshev's equation* is $(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$ where p is a constant.

    a) Find two linearly independent series solutions valid for $|x| < 1$.

    b) Show that if $p = n$ with n an integer ≥ 0, tren there is a polynonial solution of degree n. When these are multiplied by a suitable constant they are called *Chebyshev polynomials*. Bien importantes que son! En clase menciono cómo se sacan con la *Fórmula de Moivre*.

51. [Sim, pg 166] For each of the following differential equations, locate and classify its singular points on the x axis:

    a) $x^3\,(x - 1)y'' - 2(x - 1)y' + 3xy = 0$; b) $x^2\,(x^2 - 1)^2y'' - x(1 - x)y' + 2y = 0$;

    c) $x^2y'' + (2 - x)y' = 0$; d) $(3x + 1)xy'' - (x + 1)y' + 2y = 0$.

52. [Sim, pg 166] Determine the nature of the point $x = 0$ for each of the following equations:

    a) $y'' + (\sin x)y = 0$; b) $xy'' + (\sin x)y = 0$; c) $x^2y'' + (\sin x)y = 0$;

    d) $x^3y'' + (\sin x)y = 0$; e) $x^4y'' + (\sin x)y = 0$.

53. [Sim, pg 166] Find the *indicial equation* and its roots for each of the following differential equations:

    a) $x^3y'' + (\cos 2x - 1)y' + 2xy = 0$;

    b) $4x^2y'' + (2x^4 - 5x)y' + (3x^2 + 2)y = 0$.

54. [Sim, pg 167] [Un caso bien curioso]. The differential equation

$$x^2y'' + (3x - 1) * y' + y = 0$$

has $x = 0$ as an *irregular* singular point. If you insert $x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$ in this equation, show that $r = 0$ and the corresponding Frobenius series "solution" is the power series $y = \sum_0^\infty n!\,x^n$, which converges only at $x = 0$ [la serie divergente por excelencia, como la llamaba Euler]. This demonstrates that even when a Frobenius series formally satisfies such an equation, it is not necessarily a valid solution.

55. [Sim, pg 173] The equation $x^2y'' - 3xy' + (4x+4)y = 0$ has only one Frobenius series solution. Find it. [Este ejercicio lo hice en clase para ilustrar el teorema de Frobenius. Obtuve también la segunda solución, con su logaritmo y todo.]

56. [Sim, pg 166] Take $p = 0$ in *Bessel's equation*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0.$$

Show that its indicial polynomial has only one root (es una raíz doble, claro está), and show that its corresponding Frobenius series solution is

$$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\,x^{2n}$$

By taking this as y_1 solution, and substituting $y_2 = y_1 \log x + x^{r_1+1} \sum_0^\infty b_n x^n$ obtain the second independent solution

$$y_2 = y_1 \log x + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^{2n}.$$

Observación: Este ejercicio viene en el libro con $y_2 = y_1 \log x + x^{r_1} \sum_0^\infty b_n x^n$. Si se hace así, correcto como es, tiene la pega de que se recalcula y_1, que no creo que nadie quiera hacerlo de nuevo. Tómese pues un $+1$ que conviene más.

57. [PAr] Sea $3(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x = 0$. Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $x \to \infty$

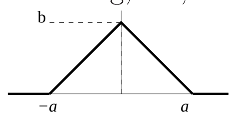
58. [Examen Jun11] Estudiar la ecuación

$$x(1-x)\,y'' + [C - (A + B + 1)\,x]\,y' - AB\,y = 0$$

en un entorno de $x = 0$, suponiendo A, B, C constantes reales. Además, suponiendo que C **no** es un número entero, obtener dos soluciones linealmente independientes. ¿Puede decir algo del radio de convergencia de estas soluciones? (Se pide todo: si $x = 0$ es regular o singular, ecuación de Euler en $x = 0$, series de Frobenius...)

Observación: Esta ecuación se conoce con el nombre de *hypergeometric equation* y ya la estudiaron (como no!) Euler y Gauss. Cuando uno trabaja con una EDO y mediante un cambio de variable consigue transformarla en una ecuación hipergeometrica, uno respira aliviado, ya que muchas de sus soluciones están tabuladas y se conocen muchas propiedades.

ECUACIONES CLÁSICAS DE LA FÍSICA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

59. [Str, pg 35] Solve the plucked string, i.e., the wave equation with initial data $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = 0$, where $f(x) =$ 

. Calculate $u(x, a/2c)$, $u(x, a/c)$ and $u(x, 2a/c)$.

60. [Str, pg 36] Solve $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = e^x$, $u_t(x, 0) = \sin x$.

61. [Str, pg 44] Consider the solution $1 - x^2 - 2kt$ of the diffusion equation. Find the locations of its maximum and its minimum in the closed rectangle $\{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$.

62. [Str, pg 45] The purpose of this exercise is to show that the maximum and minimum principle is not true for the equation $u_t = x u_{xx}$, which has a variable coefficient.

    (a) Verify that $u = -2xt - x^2$ is a solution. Find the location of its maximum in the rectangle $\{-2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq t \leq 1\}$.

    (b) Where precisely does our proof of the maximum principle break down for this equation?

63. Demostrar que el problema
$$\begin{cases} \Delta w - w^3 = 0 & \text{en } \mathcal{D} \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} + w = 0 & \text{en } \partial\mathcal{D} \end{cases}$$
    tiene solución única (Green).

    Comentario: El problema es no lineal y no se pueden restar dos soluciones para obtener una solución de la ecuación homogénea, pero se puede aplicar la fórmula de Green directamente.

64. El problema 118 puede hacerse aquí también. Es sobre *principio del máximo (mínimo)* en Laplace.

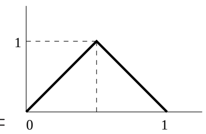
    Nota: Problema puesto en el examen de Junio de 2006

65. Dado el problema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - t^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au = F, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0, t) = f_0, u(1, t) = f_1 \\ u(x, 0) = u_0, \end{cases}$$
    donde F, f_0, f_1, u_0 son funciones dadas de x, t, se pide:

    (a) Completar cada línea con la indicación del dominio correspondiente. Dibujar el recinto del problema e indicar qué es cada línea del problema.

    (b) Demostrar unicidad (por Green) para ciertos valores de a, ¿cuáles? (*Indicación*: escribir con detalle la fórmula de Green en este caso).

    (c) Dados $F = f_0 = f_1 = 0$, aplicar separación de variables para obtener soluciones.

(d) Aplicar (c) al caso $u_0(x) =$ 

66. [W, pg 54] Show that the problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^x \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^y \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, & x^2+y^2<1 \\ u = x^2, & x^2+y^2=1 \end{cases}$$

has at most one solution.

[Hint]: Use the divergence theorem to derive an energy identity

[Hint-mía]: Escribir la ecuación que satisface $w = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 soluciones del problema dado. Para demostrar unicidad multiplicar por w la ecuación obtenida e integrar. Las condiciones de contorno tienen mucho que decir en el resultado de la integral, como bien sabemos. Estaremos usando el torema de la divergencia como dice el Prof W., aunque no lo digamos.

67. [PAr] El problema

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, \quad 0 < x < \pi,\ -\pi/4 < y < \pi/4 \\ u_y(x, -\pi/4) = u_y(x, \pi/4) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi, y) = \sin 2y, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4 \end{cases}$$

no tiene solución única (basta ver que la solución, calculada por separación de variables, es $u = C \sin x + \dfrac{\sinh \sqrt{3}x}{\sinh \sqrt{3}\pi} \sin 2y$, donde C es una constante arbitraria).

Demostrar que la fórmula de Green (escriba con detalle la fórmula de Green en este caso) no puede demostrar unicidad–dicho en palabras corrientes, que Green se encoge de hombros y dice 'No puedo concluir nada...'

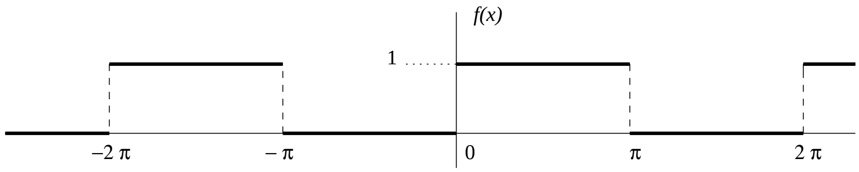
68. [Es un remake de 107] Demostrar (sin calcular la solución!!) que el problema

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \cos^2\theta, \quad r < 1,\ \ 0 < \theta < \pi, \\ u_r(1,\theta) = f(\theta), \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0, \end{cases}$$

tiene solución sólo si $\int_0^\pi d\theta f(\theta) = \dfrac{\pi}{4}$. Dibujar el recinto de integración.

SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER

69. [Boas, pg 310] Expand in a Fourier series the function $f(x)$ sketched in the next figure. This function might represent, for example, a periodic voltage pulse. The terms in our Fourier series would then correspond to the different a-c frequencies which are combined in this 'square wave' voltage, and the magnitude of the Fourier coefficients would indicate the relative importance of the various frequencies.



70. [W, pg 87] Hallar la serie de Fourier de $f(x) = e^x$ en $-\pi < x < \pi$. Hallar la suma de dicha serie en $x = \pi$.

71. [Str, pg 131] Find the Fourier sine series of $f(x) = x$ on the interval $(0, l)$. Apply Parseval's identity to find the sum $\sum_1^\infty 1/n^2$. *Aclaración*: Algunos alumnos principiantes piensan que como la función x es impar en $\mathbf{R}$ lo suyo es desarrollarla periódicamente en serie de *senos* pero no en cosenos. Nada tiene que ver una cosa con otra y el problema habría estado correctamente propuesto si se hubiera pedido la serie de cosenos de x en $(0, l)$. Pero es otro problema diferente. Puede usted echar la cuenta si quiere.

72. [Str, pg 131] Find the Fourier cosine series of $f(x) = x^2$ on the interval $(0, l)$. Apply Parseval's identity to find the sum $\sum_1^\infty 1/n^4$.

73. [Str, pg 130] & [To, pg 40] Find the sine Fourier series of the function $\cos x$ on the interval $(0, \pi)$. For each x satisfying $-\pi \leq x \leq \pi$, what is the sum of the series?

    Consejo: **No** pasar de ninguna manera las series de Fourier sin hacer este problema!

74. [Str, pg 108] Given the Fourier sine series of $f(x) = x$ on $(0, l)$

$$x \sim \frac{2l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} - \cdots\right),$$

    assume that the series can be integrated term by term (a fact that Strauss shows later in his book).

    (a) Find the Fourier cosine series of the function $x^2/2$. Find the constant of integration that will be the first term in the cosine series.

    (b) By setting $x = 0$ in your result, find the *sum* of the series $\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

75. [Str, pg 114] Let $f(x)$ be a function of period π. If $f(x) \sim \sum_1^\infty b_n \sin nx$ for all x , find the odd coefficients $b_1, b_3, \ldots$.

76. [Str, pg 114] & [To, pg 26] Without any computation, predict which of the Fourier coefficients of $|\sin x|$ on the interval $(-\pi, \pi)$ must vanish. Later compute its Fourier series and see whether your prediction is right.

77. [Str, pg 114] (a) Let $f(x)$ be a continuous function on $(0, l)$. Under what conditions is its *odd* extension also a continuous function? [Continua en $(-l, l)$, por supuesto].

    (b) Let $f(x)$ be a diffentiable continuous function on $(0, l)$. Under what conditions is its *odd* extension also a differentiable function?

    (c) Same as part (a) for the *even* extension.

(d) Same as part (b) for the *even* extension.

78. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ -2 & 1 < x < 2 \end{cases}$.

a) Dibujar al menos tres períodos de la función representada por la serie de senos de $f(x)$, y sin calcular ningún coeficiente responder a las siguientes preguntas: ¿A qué valor converge la **serie** en $x = 1$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = 0$? ¿Y en $x = -1$?

b) Si la función se continúa con período 2 (dibújela, por favor, tres períodos al menos) y se representa por la serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x),$$

¿cuánto vale $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$? (aquí le pido el valor numérico, no una expresión).

79. [MJRP] [Examen Jun09] Sea el desarrollo de $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ en $(0, 1)$ dado por

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi x}{\pi\,(1 - 4n^2)}.$$

a) encuentre el período de la serie y dibuje la extensión de la función $\sin\dfrac{\pi x}{2}$ que representa (dibuje tres períodos al menos, por favor).

b) Según los teoremas de convergencia puntual de series trigonométricas, ¿cuanto vale la serie en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$? Halle el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)}$.

c) Suponiendo que la igualdad del enunciado puede integrarse término a término, calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi x}{n\pi\,(1 - 4n^2)}$ en $0 \le x \le 1$ **y en** $-1 \le x \le 0$.

80. [To, pg 40] Find the series (a) $\sum_1^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, (b) $\sum_1^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}$, (c) $\sum_1^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$, (d) $\sum_1^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2}$ by using the following result: expand $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $(-\pi < x < \pi)$, where A, B, C are constants in Fourier series. The graph of $f(x)$ is a parabola. By periodic extension, we can obtain a continuous or a discontinuous function, depending on the choice of the constants A, B, and C. If your expansion is correct you shall obtain

$$Ax^2 + Bx + C \sim \frac{A\pi^2}{3} + C + 4A\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} - 2B\sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi$$

Use this result to calculate the series.

81. [MJRP] Let $f(x)$ be a function such that $f(x) = -f(x - 2\pi/3)$. Expand $f(x)$ in a full Fourier series. From your result give some examples of functions that satisfy the above relation.

[Hint]: $2\pi/3$ is not the period of $f(x)$. Find the period and expand.

82. [Str, pg 118] (a) On the interval $[-1, 1]$, show that the function x is orthogonal to the constant functions.

    (b) Find a quadratic polynomial that is orthogonal to both 1 and x.

    (c) Find a cubic polynomial that is orthogonal to all quadratics. (These are the first few *Legendre polynomials.*)

83. [Str, pg 119] Find the complex eigenvalues of the first-derivative operator d/dx subject to the single boundary condition $X(0) = X(1)$. Are the eigenfunctions orthogonal on the interval $(0, 1)$?

84. [Str, pg 120] Show that none of the eigenvalues of the fourth-order operator $+\dfrac{d^4}{dx^4}$ with the boundary conditions $X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0$ are negative.

    Comentario: Cuando Strauss dice eigenvalues de $+d^4/dx^4$ quiere decir $d^4X/dx^4 = \lambda X$. Otras veces usa $-d^2/dx^2$ y entonces quiere decir $-d^2X/dx^2 = \lambda X$. Puede que otros autores hagan lo mismo. Desde luego se aplica al problema 83. Otra cosa, el enunciado dice que se pruebe que λ es no-negativo, pero yo creo que ni siquiera puede ser cero, o sea, que es estrictamente positivo.

    Para hacer este problema integrar por partes (o sea, Green) $\int_0^1 dx\, X'''' X$ usando las condiciones de contorno, hasta que se vea que esta integral es una cantidad positiva. Si uno hace la integral $\int_0^1 dx\, X^{*''''} X$ en lugar de la anterior se ve que los autovalores han de ser todos reales, cosa que parece suponer el enunciado (con razón).

85. [Str, pg 120] Apply Gram-Schmidt orthogonalization procedure to the pair of functions $\cos x + \cos 2x$ and $3\cos x - 4\cos 2x$ in the interval $(0, \pi)$ to get an orthogonal pair.

    Este proceso se necesitará en Física y Mecánica Cuántica, pero es útil en otras cosas. Resuelve muchas papeletas.

86. [MJRP] Sean los polinomios

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x - a \\ P_2 &= x^2 + bx + 1/6 \end{aligned}$$

    donde a y b son constantes.

    a) Determinar a y b de manera que $\{P_0, P_1, P_2\}$ sean ortogonales en $[0, 1]$ con peso=1.

    b) Calcular la combinación lineal de los tres polinomios anteriores (tome como constantes a, b las obtenidas en el apartado anterior) que mejor aproxime a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1/2 \\ 1 & 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

    en el sentido de *mínimos cuadrados.*

    c) La función $f(x)$ es discontinua en $x = 1/2$, pero la combinación lineal calculada en b) no lo es. ¿Qué valor toma en este punto la combinación lineal? ¿Está de acuerdo dicho valor con el valor de una serie de Fourier en las discontinuidades de la función a la que representa?

87. [Str, pg 98] (also [W, pg 168]) On the interval $0 \le x \le 1$, consider the eigenvalue problem

$$\begin{aligned} & u'' + \lambda u = 0 \\ & u'(0) + u(0) = 0 \\ & u(1) = 0 \end{aligned}$$

(absorption at one end and zero at the other) (a) Find an eigenfunction with eigenvalue zero. Call it $u_0(x)$.

(b) Find an equation for the positive eigenvalues $\lambda = \omega^2$, and show graphically that there are an infinite number of positive eigenvalues.

(c) Is there a negative eigenvalue?

88. Resolver el problema de contorno propuesto en el ejercicio anterior. Desarrollar $f(x) = 1$ en serie de las autofunciones obtenidas.

Nota: El problema 2 de [W, pg 180] es básicamente éste.

89. [W, pg 72] Find the best approximation of the form $a + bx$ in the sense of least squares on the interval $-1 \le x \le 1$ to the function $f(x) = e^x$.

90. [W, pg 73] Find the polynomial of degree 2 which best approximates $\sin x$ on the interval $(0, 1)$ in the sense of least squares with $\rho(x) = 1$.

Hint: Use the results of the following exercise: We define the polynomials $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots$ by requiring that p_n be a polynomial of degree n with the coefficient of x^n equal to one, and that $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots$ be orthogonal in the interval $(0, 1)$ with respect to $\rho(x) = 1$. Find $p_0(x)$, $p_1(x)$ and $p_2(x)$.

SEPARACIÓN DE VARIABLES

91. El problema 65 es también de separación de variables.

92. [W, pg 106] Resolver la ecuación de Laplace en el cuadrado con las siguientes condiciones de contorno mixtas

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \\ u(x, 0) = (1 - x)^2, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(x, 1) = 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ u_x(0, y) = u(1, y) = 0, \quad 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Para avanzados: Hallar una cota del error $|u(x, y) - s_2(x, y)|$.

93. [Str, pg 108] A rod (varilla) has length $l = 1$ and its temperature satisfies the heat equation. Its left end is held at temperature 0, its right end at temperature 1. Initially (at $t = 0$) the temperature is given by

$$u(x, 0) = \begin{cases} 5x/2, & 0 < x < 2/3 \\ 3 - 2x, & 2/3 < x < 1. \end{cases}$$

Find the solution, including the coefficients.

Hint: First find the equilibrium solution $\bar{u}(x)$, and then solve the heat equation with initial condition $u(x,0) - \bar{u}(x)$.

94. Sea
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,2),\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 4. \end{cases}$$
1) Resolver por separación de variables

2) Sabiendo que $1 - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \cdots = \dfrac{\pi^3}{32}$, calcular $u(1,2)$. ¿Cuánto vale $u(x,1)$?

95. Resolver por separación de variables
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin\dfrac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

96. [PAr] Resolver usando separación de variables
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = \cos t, \quad t > 0. \end{cases}$$

97. [PAr] Resolver la ecuación
$$\begin{cases} \Delta u = x - a, \quad (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0. \end{cases}$$
Comentario: La condición en el borde del cuadrado (las parciales igual a cero) indican extremos aislados.

98. [PAr] Sea el siguiente problema
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = A, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = B, \quad 0 \le x \le 1 \\ u_x(0,t) = C,\ u_x(1,t) = D, \quad t > 0, \end{cases}$$
donde A, B, C, D son constantes arbitrarias. (a) Resolverlo usando separación de variables. (b) Determinar la relación entre las constantes para que exista una solución estacionaria y calcularla. (c) Dar una interpretación física de la relación obtenida en (b).

99. [PAr] Resolver la siguiente ecuación de Poisson en el disco unidad
$$\begin{cases} \Delta u = 4, \quad r < 1 \\ u(1,\theta) = \cos 2\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$
Sugerencia: Como la inhomogeneidad de la solución es sólo una constante (el 4), lo mejor es sacar a mano una solución particular fácil de $\Delta u = 4$ (que sea 2π periódica en los ángulos, claro está... las condiciones de contorno han de respetarse siempre) y luego sumarle a la solución fácil la solución de Laplace en el interior de un disco con condiciones de contorno periódicas.

100. [PAr] Resolver la ecuación

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-2x}, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Una vez resuelta decir cuál sería la solución en el caso en que el dato inicial fuera $u(x,0) = f(x)$, con una $f(x)$ arbitraria pero buena.

101. [Examen Jun09] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x} \\ u(0,t) = u(1,t) + u_x(1,t) = 0. \end{cases}$$

(Puede hacer el problema directamente o después de hacer el cambio de variables $u = e^{pt+qx}w$, p y q constantes a determinar, que lleve la ecuación a otra más sencilla). En casa puede hacerse de las dos maneras para aprender.

102. Resolver en polares

$$\begin{cases} \Delta u = r, \quad r < 2,\ 0 < \theta < \pi \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0 \\ u(2,\theta) = 3. \end{cases}$$

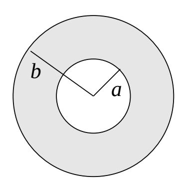
Pintar bien el recinto. Ver la sugerencia del problema 99 para resolverlo.

103. [Examen Jun09] [Problema muy interesante. Curioso: hay problemas que son muy interesantes y otros que no valen un pimiento. Este es de los primeros]. Hallar la única solución **acotada** $u(r,\theta)$ del problema en el plano

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \dfrac{2\sin\theta}{1+r^2} \\ u(1,\theta) = 1 \end{cases},$$

a) en el círculo $r < 1$, b) en el exterior del círculo $r > 1$. *Atención!!* $r \arctan r \to \infty$ si $r \to \infty$

104. a) Calcular la única función armónica del plano que en la corona circular de la figura ($0 < a < r < b$) toma los valores $u(a,\theta) = 1$, $u(b,\theta) = \sin^2\theta$.



b) Decir en qué puntos del plano alcanza $u(r,\theta)$ su valor máximo y mínimo.

105. Calcular la solución en el disco unidad de

$$\begin{cases} \Delta u = \theta, \quad r < 1 \\ u(1,\theta) = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Comentario: Este problema es más complicado que 99 y 102 y se debe tener cuidado. Podría pensarse que la sugerencia apuntada en 99 vale aquí también pero no, no vale. Cojamos una solución fácil de $\Delta u = \theta$, $r^2\theta/4$ por ejemplo. Esta solución está muy bien, pero ay! **no** es periódica en θ, y como no lo es no puede procederse como en los ejercicios mencionados. También está bien hacer este problema en $[-\pi, \pi)$ en lugar de $[0, 2\pi)$. ¿Cuál va a ser la diferencia?

106. [Examen Jun06] a) Resolver y dibujar el dominio.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 < r < 3 \\ u(1,\theta) = \sin 3\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi \\ u(3,\theta) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \quad 1 \le r \le 3 \end{cases}$$

b) Decir en qué puntos del plano alcanza $u(r,\theta)$ su valor máximo y mínimo.

107. [PAr] [Muy interesante] Encontrar por separación de variables la única solución **acotada** $u(r,\theta)$ del plano que satisface

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \cos^2\theta, \quad r < 1, \;\; 0 < \theta < \pi, \\ u_r(1,\theta) = a, \;\; u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0, \end{cases}$$

especificando el valor de la constante a para que dicha solución exista. Dibujar el recinto de integración.

108. [PAr] Calcular por separación de variables que la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, \quad 0 < x < \pi, \; -\pi/4 < y < \pi/4 \\ u_y(x,-\pi/4) = u_y(x,\pi/4) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \sin 2y, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4 \end{cases}$$

es $u = C\sin x + \dfrac{\sinh\sqrt{3}x}{\sinh\sqrt{3}\pi}\sin 2y$, donde C es una constante arbitraria. Como se ve, la solución no es única, pero eso a separación de variables no le importa, la calcula igual.

Nota: A la ecuación $-\Delta u = \lambda u$ se le llama *Helmholtz's (or eigenvalue) equation*.

109. [Examen Jun07] Encontrar por separación de variables la función $u(x,t)$ que satisface las condiciones

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, \quad 0 < x < 1/2, \; t > 0 \\ u(x,0) = 1 - 2x, \\ u_x(0,t) = u(1/2,t) = 0. \end{cases}$$

Sol: $u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\, e^{-t^2-(2n-1)^2\pi^2 t}\cos(2n-1)\pi x$

110. [Examen Sep09] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2\sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Comprobar que $u(x,\pi) = -\sin x$.

TRANSFORMADAS DE FOURIER

111. [Str, pg 330] Use Fourier transforms to solve the ODE $-u_{xx} + a^2 u = \delta$, where δ is the delta function.

112. [Problema del calor en una varilla infinita] Resuelva

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

con la condición de que u esté acotada en el infinito.

113. Obtener la *fórmula de D'Alembert* usando transformadas de Fourier para resolver

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

114. [Examen Jun09] a) Calcular la transformada de Fourier $F(k)$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le -a, \quad x \ge a, \\ (a+x)/a^2 & -a \le x \le 0 \\ (a-x)/a^2 & 0 \le x \le a \end{cases}$$

(quizás encuentre usted útil dibujar $f(x)$). ¿Cuál es el valor de $F(k)$ cuando $k = 0$? ¿Hay alguna razón para el valor de $F(0)$ en términos geométricos?

b) Aplicando la transformada de Fourier inversa al resultado obtenido en a), exprese $f(x)$ como una integral en la variable k y deduzca el valor de

$$\int_0^\infty dk\, \frac{1 - \cos ka}{k^2}$$

Nota: Antes de empezar el problema escriba **claramente** la definición de *transformada de Fourier* que usted va a utilizar.

115. [Examen Jun99] Usar la transformada de Fourier para resolver la ecuación con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_{tt} + \dfrac{1}{4} u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-\pi x^2}, u_t(x,t) = 0 \end{cases}$$

Comentario: Como se trata de una ecuación de ondas con $c = i/2$ (sea esto lo que Dios quiera), también puede hacerse usando la fórmula de D'Alembert. Hacedlo de este modo también.

116. [MJRP] Sea el problema

$$\begin{cases} u_t + a^2 u_{xxxx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x), \end{cases}$$

donde a es una constante real y $\delta(x)$ la *función* delta de Dirac.

(a) Hallar mediante la transformada de Fourier la solución $u(x,t)$ que está acotada. Dejad la solución expresada mediante una integral, que no hay que resolver porque no sabéis.

(b) Calcular $u_{xxx}(0,t)$. Esta integral sí sabéis hacerla.

Ayuda: Recordad que $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)$.

117. [Examen Sep01 en otro grupo] Resolver mediante la transformada de Fourier el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, & -\infty < x,\, y < \infty,\ t > 0 \\ u(x,y,0) = x^2 e^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

Ayuda: $\int_{\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx-ax^2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$, si $a > 0$. Ya se ve de este problema que la transformada de Fourier se emplea también para problemas en varias dimensiones, no sólo en una.

FUNCIONES ARMÓNICAS

118. [Str, pg 163] Suppose that u is a harmonic function in the disk $D = \{r < 2\}$ and that $u = 3\sin 2\theta + 1$ for $r = 2$. Without finding the solution, answer the following questions.

(a) Find the maximum value of u in $\overline{D}$.

(b) Calculate the value of u at the origin.

119. [MJRP] Demostrar que si A, B, C, D son constantes, el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (0,1) \times (0,1) \\ u_x(0,y) = A, \quad u_x(1,y) = B, \quad u_y(x,0) = C, \quad u_y(x,1) = D \end{cases}$$

sólo tiene solución si se satisface la relación $A - B + C - D = 0$ (que no es más que un balance energético, como siempre). Encontrar que en ese caso la solución es igual a $u(x,y) = -(A-B)\,x^2/2 - (C-D)\,y^2/2 + Ax + Cy + E$, donde E es una constante arbitraria.

120. [Str, pg 158] Find the harmonic function in the square $D = \{0 < x, y < \pi\}$ with the boundary conditions

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \cos^2 y = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2y), \quad 0 \le y \le \pi \\ u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

121. [Str, pg 167] [The exterior of a circle] Solve $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in the exterior $\{r > a\}$ of a disk with the boundary condition $u = 1 + 3\sin\theta$ on $r = a$, and the condition at infinity that u be bounded as $r \to \infty$.

122. [Str, pg 167] Derive *Poisson's formula*

$$u(r,\theta) = (r^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{f(\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

for the exterior of a circle.

Nota: En el exterior del círculo la fórmula anterior parece que queda mejor escrita así: $u(r,\theta) = (1-(\frac{a}{r})^2)\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{f(\phi)}{1-2(a/r)\cos(\theta-\phi)+(a/r)^2}$. Sin embargo, escrita como dice el enunciado se ve que es la misma la misma que la fórmula de Poisson en el **interior** de un círculo con la única diferencia de que en el numerador una dice (r^2-a^2) y la otra, la del interior, dice (a^2-r^2). Curioso...

123. [W, pg 145] Find the solution to $\Delta u = -1$ in the square $0 < x, y < \pi$, with the conditions $u = 0$ when $x = 0, x = \pi, y = 0, y = \pi$.

    Curiosidad: La solución de este problema es una serie – que yo no veo como reducirla más– y sin embargo si se cambia la condición de contorno por $u(r = \pi, \theta) = 0$, o sea, cero en un círculo del plano de radio π en lugar de un cuadrado, sale una solución bien corta $u = (\pi^2 - r^2)/4$. ¿Por qué? Yo lo sé...

124. [W, pg 111] Demostrar por inducción que las funciones $r^n \cos n\theta$ y $r^n \sin n\theta$ son polinomios en x e y de grado n (se llaman *polinomios armónicos*). Partiendo de este hecho, demostrar que la solución más general de la ecuación de Laplace en un círculo sin singularidades en el origen,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

    es la serie de Taylor de $u(x, y)$ en $x = y = 0$.

    Consejo: Es muy útil saber que $r^n \cos n\theta$ y $r^n \sin n\theta$ son polinomios en x e y de grado n, útil en Mecánica Cuántica, sin duda, pero no menos en nuestras demostraciones diarias (!) y en la reordenación de las matemáticas en nuestras cabezas. De tener varias cabezas, claro.

125. [MJRP] Encontrar la función armónica u definida en la corona circular $a < r < b$ del plano qur satisface la condición $u(a, \theta) = 1$, $u(b, \theta) = 7$.

NOTAS CURIOSAS

126. [Comunicado por Miguel Ángel Rodríguez] La ecuación de Laplace en tres dimensiones es separable sólo en **once** sistemas de coordenadas. Este resultado se debe a L.P. Eisenhart y fue publicado en *The Annals of Mathematics* en 1934 con el título *Separable Systems of Stäckel.*

127. [Leído en el libro de W. A. Strauss, pg 102] Algunos desarrollos de funciones en series de Fourier se descubrieron históricamente mediante series de potencias y llevó un trabajo ingente. Claro, que antes calculaban como dioses.

128. La *identidad de Parseval* no sirve para sumar series alternadas, sólo sabe sumar series positivas.

129. [Leído en el libro de Whittaker&Watson, pag 236] Hay demostraciones de un teorema atribuido a Weierstrass que dice que la *función Gamma* no satisface ninguna ecuación diferencial con coeficientes racionales (quiere decir que los coeficientes son funciones racionales como en la

ecuación hipergeométrica, por ejemplo).

130. Junio de 2011: Algunos alumnos integran $\cos x \sin 2nx$ por partes y cosa curiosa, les sale bien: $(\sin x \sin 2nx + 2n \cos x \cos 2nx)/(1-4n^2)$. Parece un milagro.

PROBLEMAS DE EXÁMENES

Estos problemas son de otros profesores/grupos puestos en años anteriores en nuestra Facultad.

131. [Jun2005] Calcúlese la solución general de la ecuación $xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2$ y determínese la solución particular que contiene a la curva $y = 1, u = x^2$.

132. [Sep2005] Sea la ecuación $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = xy$ definida en el dominio $0 < x, y < \infty$. Clasificar dicha ecuación (parabólica, hiperbólica o elíptica) en este dominio. Determinar sus curvas características. Reducirla a su forma canónica. Hallar la solución general de dicha ecuación.

133. Los problemas 115 y 117

134. [Jun2001] Sea el desarrollo en serie de Fourier de senos y cosenos

$$x^{10} + 2x^8 + 4 = \frac{A_0}{2} + \sum_1^\infty (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Averiguar cúal de las siguientes afirmaciones es correcta: (a) $B_n = 1/n^3$, (b) $A_n = 2B_n = 1/n^3$, (c) $A_n = 0$, (d) $B_n = 0$, (e) $A_n = B_n$.

PROBLEMAS QUE NO ME GUSTAN PERO QUE HE HECHO

135. [Str, pg 107] Solve the problem (esto parece una cuerda rota!)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Soluciones

Si encuentra errores en estas soluciones comuníquelo, por favor, a la dirección mjrplaza@fis.ucm.es. Muchas gracias. O hacédmelo saber en clase.

1. (a) Es importante sacar bien este plano tangente: $x+4y-18z+13=0$, (b) $6x+8y-z-3=0$, (c) $4x+3y-5=0$

2. El orden es: segundo, segundo, tercero, segundo, segundo, primero, primero, cuarto. Lineales homogéneas son: b, e, g; lineales inhomogéneas: a, d; no-lineales (no tiene sentido discutir si homogéneas o no porque para ellas no hay principio de superposición): c, f, h.

Quizás se podría decir de c y f que son homogéneas (aunque no valga para nada) porque $u=0$ es solución. Con el criterio 'que $u=0$ sea solución', entonces h es no-homogénea. Pero tampoco creo que sea importante porque esto no resuelve nada.

4. Las funciones mencionadas forman un espacio vectorial para todo x real. La dimensión es dos y la base $\{1, \sin^2 x\}$, ó $\{1, \cos^2 x\}$ ó $\{\sin^2 x, \cos^2 x\}$, la que más guste.

7. En la notación $p \equiv \partial z/\partial x$, $q \equiv \partial z/\partial y$ (ésta es una notación standard en muchos libros de ecuaciones, conviene saberlo): (a) $yp - xq = 0$, (b) $z^2(p^2+q^2+1)=1$, (c) $z = pq$, (d) $px + qy = q^2$, (e) $z(xp+qy) = z^2 - 1$. Curioso: (a) y (b) son esferas (la misma superficie al fin y al cabo), sin embargo la familia de esferas (a) queda descrita por una ecuación diferencial lineal en z mientras que para la familia (b) la ecuación es no-lineal.

8. (a) $yp - xq = 0$. Se puede demostrar que una superficie es de revolución en torno al eje z si y sólo si satisface esta ecuación. La superficie (a) del ejercicio 7 es de revolución, algo que ya sabíamos porque se trata de una esfera centrada en el eje z, (b) $yp - xq = y^2 - x^2$, lleva parte de la anterior $yp - xq$, o sea de revolución en torno al eje z, pero añade algo más que la 'desrevoluciona'. (c) $xp - yq = 0$, (d) $p + q = 0$, (e) $z(p-q) = y - x$.

9. La ecuación a resolver es $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$. Su solución general es $z = x^2 f(y/x)$ donde f es una función arbitraria de clase C^1. La solución particular pedida es el paraboliode hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

10. Aparece esa singularidad porque la curva directriz, que como dice el enunciado es una curva buenísima, suave y sin picos, es tangente a las características en ese punto: la proyección de la curva generatriz sobre los planos paralelos al $z=0$, me refiero a la parábola $y = x^2$, toca tangentemente a la característica $y + x = c_1$ cuando $c_1 = -1/4$, que corresponde a $x = -1/2$, i.e., a $s = -1/2$.

11. a) $u = f(x-y, y-z)$, b) $F\left(\dfrac{y}{x^2}, \dfrac{z}{x^3}, \dfrac{u}{x^4}\right) = 0$, ó $u = x^4 f\left(\dfrac{y}{x^2}, \dfrac{z}{x^3}\right)$. Como siempre, F, f funciones arbitrarias de la clase adecuada.

12. Solución general: $u = f(x+y^2)\, e^{y^2}$. i) $u = e^{-x}$, única. ii) $u = 0$ cuando $y^2 + x \geq -1$, e indeterminada (puede haber infinitas soluciones) cuando $y^2 + x < -1$.

13. Solución general: $u = -x^2 e^{-y} + f(x\, e^{-y})$. Solución particular pedida: $u = -(x^2+x)\, e^{-y}$. Única y sin problemas.

14. La ecuación de las características es $x-y=c_1, u=c_2e^{-y}+\frac{1}{4}e^{3y+c_1}$, con c_1, c_2 constantes. La solución general de la ecuación es $u=e^{-y}f(x-y)+\frac{1}{4}e^{x+2y}$, siendo f una función arbitraria de clase C^1. La solución particular pedida es $u=\dfrac{e^x}{2}\sinh 2y$. Es única.

15. Solución general: $u=F(x+1/t)\,e^{x^2}$, F arbitraria. Solución particular: $f(x+1/t-1)\,e^{2x+2/t-1-1/t^2-2x/t}$; $u(3,1/2)=0$. Para obtener infinitas soluciones basta tomar como generatriz una característica, por ejemplo, $x+1/t=0$, y sobre ella un dato de Cauchy, $u(x,-1/x)=0$, digamos. Con este dato inicial hay infinitas soluciones: $u=0$, $u=\sin(x+1/t)\,e^{x^2}$, $u=(x+1/t)^2\,e^{x^2}$, etc. Basta con poner en lugar del seno o de $(x+1/t)^2$ cualquier función F de clase C^1 que cumpla $F(0)=0$.

18. Curvas características $xy=c_1, u=c_2/x-x$, con c_1, c_2 constantes. La solución general de la ecuación es $c_2=f(c_1)$, o sea, $u=f(xy)/x-x$ o bien $c_1=f(c_2)$, es decir $xy=f(ux+x^2)$, la que más guste (son la misma) siempre con f es una función arbitraria de clase C^1. El dato $u(x,0)=-x$ lleva a $c_1=c_2=0$, dato impuesto sobre ambas características y la relación $f(0)=0$ presenta muchas posibilidades (infinitas u's satisfacen el dato). Por ejemplo: si $f(x)=0$, $u=-x$; si $f(x)=x$, $u=y-x$; si $f(x)=x^2$, $u=xy^2-x$; si $f(x)=\sin x$, $u=\sin(xy)/x-x$. El cuento de nunca acabar. El otro dato corresponde a $c_2=2c_1^2$. La solución única es $u=2xy^2-x$.

19. Curvas características $t-2x=c_1, u=c_2\,e^{t^2/4}$. Solución general: $u=f(t-2x)\,e^{t^2/4}$ con f una función arbitraria. Ésta se fija con el dato: $u=e^{-x^2+xt}$.

20. a) $F(x^2-y^2, x^2+z^2)=0$ ó $z^2=-x^2+f(x^2-y^2)$, la que más os guste; b) $F(x^2-y^2, x^2-z^2)=0$ ó $z^2=x^2+f(x^2-y^2)$. F y f arbitrarias y de la clase adecuada.

21. Es integrable porque $\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{F}=0$. La familia de superficies perpendicular al campo vectorial $\mathbf{F}$ de los coeficientes de la ecuación de Pfaff es $U=y\,(z+x)/(z+y)=k$, donde k es una constante. El factor integrante es $1/(z+y)^2$.

22. Como $\mathbf{F}=((y+a)^2, z, -(y+a))$, $\mathrm{rot}\mathbf{F}=(-2,0,-2(y+a))$ y por lo tanto $\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{F}=0$. Se puede integrar. La familia de superficies perpendicular a $\mathbf{F}$ es $U=\dfrac{z}{y+a}-x=k$, con k una constante (la de la familia). El factor integrante es $\mu=-1/(y+a)^2$.

23. i) $a=2$ ii) Si $U=z-y^2/x^3=k$, k la constante de integración que selecciona a cada superficie de la familia, entonces $\mu=1/x^4$. Y nunca olvide que *la U es la k*.

24. No se integra. No se pueden quitar los torbellinos porque $\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{F}\neq 0$. Más concretamente, $\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{F}=2x(z^2-y^2)$.

25.

26. En el primer caso $\mathrm{rot}\mathbf{F}=0$, así que se pueden encontrar las superficies equipotenciales a ojo, sin buscar siquiera un factor integrante: $u=x^2y+3xyz=c$. En el segundo caso $\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{F}=x^2y$, y no existen tales superficies.

27. $\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{F}=-5x-2y+z$. No existen superficies ortogonales a las líneas del campo $\mathbf{F}$: las turbulencias no son corregibles.

29. Al cortar el cono por planos paralelos al plano $z = 0$ resultan circunferencias. Las trayectorias ortogonales a estas circunferencias son las curvas

$$\begin{cases} y = c_1 x \\ x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha, \end{cases}$$

donde c_1 es un parámetro. Evidentemente se trata de una familia de líneas rectas contenidas en el cono que convergen en el vértice de éste.

30. (a) $x + y + z = c_1$, $xyz = c_2$, (b) $ax^2 + by^2 + cz^2 = c_1$, $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = c_2$, (c) $(x + y)(z + 1) = c_1$, $(x - y)(z - 1) = c_2$, (d) $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = c_2$, (e) $z = c_1 y + y^2$, $x = c_2 y + c_1 y \ln y + y^2$.

34. En las variables características $r = x - y$, $s = 3x - y$, la ecuación se reduce a $u_{rs} - u_r - \dfrac{5}{2}u_s - \dfrac{u}{2} = 0$. Con el cambio $u = e^{\frac{5r}{2}+s}w$ se transforma en $w_{rs} - 3w = 0$. No se puede hacer más.

35. *Nota*: Téngase en cuenta, si se va a comparar el resultado que muestro a continuación con otros libros, que el coeficiente de u_{xy} es $2B$. Las constantes p, q son:

$$p = \frac{DC - BE}{2(B^2 - AC)}, \qquad q = \frac{AE - BD}{2(B^2 - AC)}.$$

Para poder dividir por $B^2 - AC$ es necesario que esta cantidad sea distinta de cero, o lo que es igual, que la ecuación de partida **no** sea parabólica como dice el enunciado. Para que la ecuación $[E^*]$ no tenga término en w ha de cumplirse que

$$F + \frac{D^2C - 2BDE + AE^2}{4(B^2 - AC)} = 0.$$

La solución general de la ecuación dada (es la ecuación del telégrafo: ondas con un término de rozamiento) es $u = \frac{1}{6} + e^{-2x-3y}(f(x) + g(y))$, con f, g funciones arbitrarias de la clase adecuada. El $\frac{1}{6}$ es una solución particular de la ecuación. En el caso de haber partido de una ecuación parabólica, o sea $u_{ss} + D^*u_r + E^*u_r + F^*u = G^*$ –ya la he escrito en su forma canónica, con el cambio $u = e^{pr+qs}w$ se pueden quitar los términos en u_s y en u, basta coger $q = -E^*/2$, $p = (E^* - 4F^*)/4D^*)$, quedando la ecuación para w como $w_{ss} + D^*w_r = G^{**}(r, s)$. Si $D^* = 0$, se resuelve –es una ODE lineal, de segundo orden con coeficientes constantes. Si D^* no es cero es la del calor.

36. Se ve a simple vista que si $n = 1$ la ecuación es parabólica y no hay que hacerle nada porque ya está en su forma canónica. La solución en este caso es $z = f(x) \ln y + g(x)$, donde f y g son funciones arbitrarias de clase C^2 en todo $\mathbf{R}$ o en un abierto de $\mathbf{R}$. Cuando $n \neq 1$ la situación cambia y la ecuación es hiperbólica en todo el plano xy excepto en $y = 0$ (el eje x). Las variables características de la ecuación hiperbólica son $r = x + 1/y^{n-1}, s = x - 1/y^{n-1}$, y la forma normal es $z_{rs} = 0$ ($\bar{z}_{rs} = 0$ si se quiere ser correcto). La solución general de la ecuación es pues $z = f\left(x + \dfrac{1}{y^{n-1}}\right) + g\left(x - \dfrac{1}{y^{n-1}}\right)$ con f y g funciones arbitrarias de clase C^2 en $\mathbf{R}$. No hay problemas cuando $y = 0$ (recuérdese que ahora $n \neq 1$) porque la solución que acabamos de escribir no incluye al eje x.

37. Es parabólica. Las coordenadas características son $r = x^2 + y^2, s = x$. También se puede coger $s = y$, como más guste. La ecuación canónica es $z_{ss} - z_s/s = 0$ (suprimo gorros), cuya solución es $z = s^2 f(r) + g(r)$, con f, g funciones arbitrarias de la clase adecuada. La solución general es $z = x^2 f(x^2 + y^2) + g(x^2 + y^2)$. Si se cambia x por y en esta solución el resultado sigue siendo solución de la ecuación de partida, la del enunciado, y no hace falta comprobarlo derivando: es solución porque la ecuación dada no nota el cambio x por y. Curioso: también $z = g(x^2 + y^2)$ es solución (no la más general, claro está), y lo es porque es solución de $yz_x - xz_y = 0$. ¿Qué tiene que ver esta ecuación con la de partida? Jugando un poco se ve que la ecuación del enunciado es $y(yz_x - xz_y)_{,x} - x(yz_x - xz_y)_{,y} = ...$ claro que habiendo visto la solución es ya muy fácil darse cuenta de estas curiosidades.

38. Yo creo que el Prof Weinberger no quería decir el punto $(x, t) = (0, 1)$. Y si miramos la solución que da en su libro ($t = 2 + \sin x - \cos x$, $t = \sin x + \cos x$) –dos características, algo propio de ecuaciones hiperbólicas– me reafirmo más aún en que no quería decir $(0, 1)$. Simplemente porque en la recta $(0, t)$, la ecuación del enunciado es parabólica y tendría una sola característica, no dos como dice el Prof W. Tendría una sola característica si se integrara como PDE, que no se integra ya que una recta no es un dominio abierto del plano xt. Lo explico en clase con más detalle. Pero resumo: el Prof Weinberger quería decir el punto $(x, t) = (\pi/2, 1)$, por ejemplo. Las características en este punto son $t = \sin x - \cos x$, $t = \sin x + \cos x$, que se cortan en $(\pi/2, 1)$ como debe ser, sin tangencias –o sea, que el Jacobiano de la transformación de $(x, t) \to (r, s)$ es distinto de cero en el punto– y definen *dominio de dependencia* e *influencia* de $(\pi/2, 1)$. Lo que falta aquí, lo digo en clase.

39. a) Los ejes coordenados son dominios de parabolicidad: ahí no se integra. Es elíptica en el primer y tercer cuadrante e hiperbólica en el segundo y cuarto. Donde es elíptica se tiene

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{u_\alpha}{\alpha} - \frac{u_\beta}{\beta} = 0,$$

siendo $\alpha = \sqrt{x}$, $\beta = \sqrt{y}$ si ambas $x, y > 0$ ó $\alpha = \sqrt{-x}$, $\beta = \sqrt{-y}$ si $x, y < 0$. Cuando es hiperbólica se reduce a

$$u_{rs} + \frac{ru_s - su_r}{s^2 - r^2} = 0,$$

con $r = \sqrt{-x} - \sqrt{y}$, $s = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$ si $x < 0$, $y > 0$ ó $r = \sqrt{x} - \sqrt{-y}$, $s = \sqrt{x} + \sqrt{-y}$ si $x > 0$, $y < 0$. Se acabó, GAD.

b) Elíptica en todo el plano. Coordenadas normales: $r = \arctan x + iy, s = \arctan x - iy$. En las coordenadas $\alpha = \arctan x, \beta = y$ (parte real e imaginaria de r, s), la forma canónica de la ecuación es $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0$ (era Laplace!!). La solución general es $u = f(y + i \arctan x) + g(y - i \arctan x)$, con f, g funciones arbitrarias de clase dos en el plano.

c) Parabólica en todo el plano. las variables canónicas son $r = y - \ln \sin x, s = y$ (mejor coger $s = y$ que $s = x$, pues queda una ecuación más fea si se escoge esta última). Forma canónica:

$$u_{ss} + \frac{u_r - s}{1 - e^{2(s-r)}} = 0.$$

No se resuelve (yo no sé).

40. Por Kovalévskaia sale en seguida: $u = t - 2x^2$. D'Alembert no se puede aplicar directamente porque requiere el dato inicial $u_t(x, 0) = g(x)$ y en este caso dan $u_x(0, t)$. No importa, se cambia la t por la x y se escribe el problema como

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{1}{4} u_{xx} = -4, \\ u(x,0) = x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Ahora sí se puede usar la solución de D'Alembert. A mí no me gusta emplear la integral doble para resolver el problema no-homogéneo si lo puedo evitar. En este caso se puede: una solución de la ecuación (sólo de la ecuación) a ojo es $8x^2$. Con el cambio $w = u - 8x^2$ el anterior problema se reduce a uno homogéneo en la variable w con solución $w = x - 8(x^2 + t^2/4)$, por lo que $u = x - 2t^2$. Se deshace el cambio x por t y ya está. La solución es la que calculó Mme Kovalévskaia.

58. $x = 0$ es un punto singular regular ('regular singular' en inglés) pues en las proximidades de cero la ecuación del enunciado se puede describir por la ecuación de Euler, $x^2 y'' + x\,C y' = 0$. El polinomio indicial es $r\,(r + C - 1) = 0$ con raíces $r = 0, 1 - C$, lo que quiere decir que alrededor de $x = 0$ la solución se comporta como $y \sim a_0 + b_0\, x^{1-C}$ (o como $y \sim c_1 + c_2\, x^{1-C}$, depende de como cada cual escriba las constantes). El *teorema de Frobenius* dice que si C no es un entero dos soluciones linealmente independientes de la ecuación dada son: $\sum_0^\infty a_n x^n$ con a_0 **distinto de cero**–esto no lo dicen nunca los alumnos en aprendizaje– y $x^{1-C} \sum_0^\infty b_n x^n$ con b_0 **distinto de cero** también. Haciendo las cuentas y **factorizando** –esto también lo usa poca gente menuda y lo he criticado mucho en los exámenes tras leerlos)–resultan las dos soluciones que siguen:

$$y_1 = 1 + \frac{AB}{C\,1!}\,x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{C(C+1)\,2!}\,x^2 + \frac{A(A+1)(A+2)B(B+1)(B+2)}{C(C+1)(C+2)\,3!}\,x^3 + \cdots$$

y

$$y_2 = 1 + \frac{(1+A-C)(1+B-C)}{1!\,(2-C)}\,x + \frac{(1+A-C)(2+A-C)(1+B-C)(2+B-C)}{2!\,(2-C)(3-C)}\,x^2 + \cdots.$$

Esta segunda es la primera cambiando simplemente A por $1 + A - C$, B por $1 + B - C$ y C por $2 - C$. A la solución y_1 se la conoce como *hypergeometric series* y se la denota por $F(A, B; C; x)$. El radio de convergencia de ambas series es $R = 1$ (se puede comprobar calculando límites en y_1) o dándose cuenta de que la singularidad mas cercana a $x = 0$ está en $x = 1$, otro punto singular de la ecuación.

60. Por aplicación directa de la fórmula de D'Alembert sale $u(x,t) = e^x \cosh ct + \frac{1}{c} \sin x \sin ct$.

61. The diffusion equation is $u_t = k u_{xx}$, k a positive constant. Por el *principio del máximo y mínimo* sabemos que el máximo y el mínimo de u tienen que estar o en la línea inicial $t = 0$, o en el borde $x = 0$ o en $x = 1$. El máximo está en $(0,0)$, es decir $u_{max} = u(0,0) = 1$, y el mínimo en $u_{min} = u(1,T) = -2kT$. La notación es $u(x,t)$.

62. (a) El máximo se alcanza en la tapa de arriba del dominio, es decir, en $t = 1$, pero no en $x = -2$ ó $x = 2$ como le sucedería a la ecuación de difusión, sino en $x = -1$. Tenemos pues $u_{max} = u(-1,1) = 1$. (b) La demostración falla en que $u_t - x u_{xx}$ no tiene un signo determinado en el máximo local (x_0, t_0) ni tampoco en el máximo de la frontera. En el caso del calor, de haber un máximo, $u_t - k u_{xx}$ tendría un signo determinado (positivo o cero) y se busca ese signo dentro del dominio o en el interior de la tapa de arriba y no se encuentra.

65. (b) Unicidad se demuestra como siempre: supóngase que u_1, u_2 son dos soluciones del problema, entonces $w = u_1 - u_2$ ha de ser solución de

$$\begin{cases} w_t - t^2 w_{xx} + aw = 0, \quad 0 < x < 1,\, t > 0 \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ w(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Multiplicar $w_t - t^2 w_{xx} + aw = 0$ por w e integrar entre $\int_0^1 dx \int_0^T dt$, donde T es cualquier tiempo finito $T > 0$. Usando las condiciones iniciales y de contorno se llega a que

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx\, w^2(x,T) + \int_0^1\!\!\int_0^T dxdt\, t^2 w_x^2 + a\int_0^1\!\!\int_0^T dxdt\, w^2 = 0,$$

donde todos los integrandos, y por lo tanto las integrales, son positivos o cero. El resto ya es fácil. Hay unicidad garantizada cuando $a \geq 0$ porque la única solución de la ecuación anterior (ecuaciones así siempre son balances energéticos, lo dije en clase) es $w(x,T) = 0$. Para valores negativos de a no se sabe si hay unicidad o no, pues Green ya no es capaz de decir nada. (d) La solución por separación de variables es

$$w(x,t) \sim \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\, e^{-at-(2p+1)^2\pi^2 t^3/3} \sin{(2p+1)\pi x}.$$

Conviene siempre mirar un rato las soluciones que se obtienen a ver qué nos enseñan, así uno gana maña para otros problemas. De esta solución se ve que e^{-at} puede sacarse fuera del sumatorio. De haberlo sabido antes de resolver la ecuación podríamos haber hecho el cambio $w = e^{-at}\, v$, y habernos limitado a resolver el problema ($F = f_0 = f_1 = 0$)

$$\begin{cases} v_t - t^2 v_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1,\, t > 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ v(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Para la próxima vez ya lo sabemos. La interpretación física de e^{-at}, o de aw en la ecuación diferencial, es un término de amortiguamiento (*damping term* in English).

69. $f(x) \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$

70. $e^x \sim \dfrac{\sinh \pi}{\pi}\left(1 + 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n \sin nx)\right)$. La suma es $\cosh \pi$.

73. $\cos x \sim \dfrac{8}{\pi}\left(\dfrac{1}{2^2-1}\sin 2x + \dfrac{2}{4^2-1}\sin 4x + \dfrac{3}{6^2-1}\sin 6x + \cdots\right)$. Esta serie suma $\cos x$ en $(0,\pi)$ y $-\cos x$ en $(-\pi,0)$, y suma cero en los puntos $x = -\pi, 0, \pi$.

75. Muy fácil: todos cero. Si $f(x) \sim \sum_1^\infty b_n \sin nx$, then $f(x+\pi) \sim \sum_1^\infty b_n \sin n(x+\pi) = \sum_1^\infty (-1)^n b_n \sin nx = -b_1 \sin x + b_2 \sin 2x - b_3 \sin 3x + \cdots$. Como $f(x+\pi) = f(x)$ para todo x, entonces $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$. Aunque no lo parezca se está utilizando el hecho de que $\{\sin nx\}$ es un conjunto linealmente independiente en $-\pi < x < \pi$, o dicho de otra manera, que $\sin 3x$, por ejemplo, no se puede escribir como una combinación lineal de los otros senos del conjunto.

76. $|\sin x| \sim \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2^2-1}\cos 2x + \dfrac{1}{4^2-1}\cos 4x + \dfrac{1}{6^2-1}\cos 6x + \dots\right)$, en $-\pi \leq x \leq \pi$, extremos incluidos por ser $|\sin x|$ continua en $x = -\pi, \pi$. Substituyendo $x = 0$ en el resultado anterior queda $\sum_1^\infty \dfrac{1}{4n^2-1} = 1/2$.

78. a) $-1/2$, 0, 0 (es serie de de senos!), 1/2 b) Parseval dice que: $\sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2) = 77/24$

79. a) $T = 2$. b) No es Parseval. Es pura substitución: $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$. c)

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2\sin n\pi x}{n\pi\,(1-4n^2)} = \begin{cases} 1 - \cos\frac{\pi x}{2} - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -1 + \cos\frac{\pi x}{2} - x, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

71. $x \sim \dfrac{2l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} - \cdots\right)$. $\sum_1^\infty 1/n^2 = \pi^2/6$.

72. $x^2 \sim \dfrac{l^2}{3} - \dfrac{4l^2}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3^3}\cos\frac{3\pi x}{l} - \cdots\right)$. $\sum_1^\infty 1/n^4 = \pi^4/90$.

80. Del resultado escrito, o calculando a mano las series se ve que

$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \sim -\frac{x}{2},\ -\pi < x < \pi, \qquad \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \sim \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12},\ -\pi \leq x \leq \pi.$$

En el primer caso los extremos no entran porque la serie no reproduce el valor de la función en esos puntos, en el segundo caso sí. Para obtener las series que faltan hay que cambiar x por $x - \pi$ en los dos resultados anteriores. Por supuesto, el cambio también se hace en los intervalos de convergencia. Se obtiene pues

$$\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} \sim \frac{\pi - x}{2},\ 0 < x < 2\pi, \qquad \sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^2} \sim \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6},\ 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Para ver si estos cálculos son correctos va uno ahora a un libro de tablas **bueno**, *Table of Integrals, Series, and Products* by Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., por ejemplo, y en las páginas 38, 39, puntos 1.441(1, 3), 1.443(3, 4) ve estas series con sus intervalos de convergencia. Igualitas, igualitas que estas que hemos obtenido aquí. Lo hemos hecho muy bien!

82. (b) El polinomio cuadrático es esencialmente $3x^2 - 1$. Esencialmente quiere decir salvo una constante multiplicativa que se fija por normalización. Yo siempre recuerdo que me enseñaron que "los polinomios de Legendre son 1 en el 1", o sea que cumplen $P_n(1) = 1$ y saco la constante de carrerilla. (c) El polinomio cúbico es esencialmente $5x^3 - 3x$ y ajustándole la constante queda $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$. Si miráis cualquier libro de tablas o de Mecánica Cuántica, los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad \dots$$

Así escritos cumplen la condición $\int_{-1}^1 dx\, P_n(x)P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.

83. Al resolver $X' + \lambda X = 0$ con las condiciones $X(0) = X(1)$ se obtienen los autovalores $\lambda_n = 2\pi i n$ y las autofunciones $X_n = e^{2\pi i n x}$. Aquí $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Sí, son ortogonales en $(0, 1)$ porque $(X_n, X_m) = \int_0^1 dx\, e^{-2\pi i n x} e^{2\pi i m x} = \delta_{nm}$, lo que indica que X_n es perpendicular a X_m cuando $n \neq m$.

86. a) $a = 1/2, b = -1$. b) Se parte de la combinación lineal $f(x) \sim c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2$ con c_0, c_1, c_2 constantes a determinar. Mínimos cuadrados quiere decir 'serie de Fourier', o sea, que c_1, por ejemplo, viene dada por

$$c_1 = \frac{\int_0^1 dx\, P_1 f(x)}{\int_0^1 dx\, P_1^2} = 3/2.$$

Con fórmulas semejantes se calculan los otros dos coeficientes (c_2 sale 0). Resultado: $f(x) \sim P_0/2+3P_1/2 = 3x/2-1/4$. c) $3x/2-1/4$ evaluada en $x = 1/2$ resulta $1/2$, que es justo el valor que dice la teoría de series de Fourier –para los polinomios de Legendre también vale, se prueba en un teorema en los libros superiores–que debe salir: el valor medio de la discontinuidad. Todo va bien.

Para los estudiantes que tienen interés diré que la *identidad de Parseval* dice que los omitidos $P_3, P_4, \ldots, P_{50000000}, \ldots$ perpendiculares entre sí en $[0, 1]$ y a los polinomios $\{P_0, P_1, P_2\}$, contribuyen en el desarrollo $f(x) \sim c_0P_0+c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3+\cdots$ con $1/16$. O sea, que aproximando $f(x)$ por P_0, P_1, P_2 hemos pillado de la función –en el sentido de *mínimos cuadrados*, no se olvide esto nunca... no en convergencia puntual, tampoco en convergencia uniforme...– todo menos una parte igual a $1/16$. Esto puede ser una buena o mala aproximación, depende de lo que uno necesite. Si se quiere disminuir ese $1/16$ hay que meter $P_3, \ldots$ etc.

¿Sabríais decir quienes son P_0, P_1, P_2 esencialmente? Los polinomios de.... sólo que mirados en $[0, 1]$.

87. (a) $u_0(x) = x - 1$. (b) $\lambda = \omega^2$, con ω las soluciones de $\omega = \tan\omega$. Maple dice que los primeros valores son $\omega_0 = 0$ (esto no hace falta que lo diga Maple), $\omega_1 = 4.4934, \omega_2 = 7.7253, \omega_3 = 10.9041, \omega_3 = 14.0662$. (c) No, no hay valores propios negativos como se ve gráficamente. También se ve que no los hay sin más que integrar $u''u$ entre 0 y 1 (usando este camino no hace falta resolver el problema de contorno). En realidad, de esta integración y de un buen uso de las condiciones de contorno sale una fórmula para los autovalores (el cero incluido)

$$\lambda = \frac{\int_0^1 dx\, (u' + u(0))^2}{\int_0^1 dx\, u^2}.$$

No digo que esta fórmula sea ni buena ni mala, sólo que sale, que no es poco.

88. Los autovalores y autofunciones son: $\lambda_0 = 0$ que corresponde a $u_0 = x - 1$, y $\lambda_1 = \omega_1^2 < \lambda_2 = \omega_2^2 < \cdots$ que corresponden a $u_n = \sin\omega_n(x - 1)$, donde ω_n es la solución de $\omega_n \cos\omega_n = \sin\omega_n$ como se indica en el problema anterior. Si no me he equivocado

$$1 \sim -\frac{3}{2}(x-1) - 2\sum_1^\infty \frac{\sin\omega_n(x-1)}{\omega_n + \sin\omega_n}, \quad 0 \le x < 1.$$

89. Sol: $e^x \sim \sinh(1) + 3e^{-1}x$ porque los polinomios 1 y x son perpendiculares en $[-1, 1]$ (ver ejercicio 82 si no se recuerda esto: son Legendre). Así que $a = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 dx\, e^x = \sinh(1)$, y $b = \frac{3}{2}\int_{-1}^1 dx\, xe^x = 3e^{-1}$, o sea, que en el sentido least squares el área $\int_{-1}^1 dx\, (e^x - (a + bx))^2$ está minimizada eligiendo a y b como se dice arriba (sale 0.052653 ésta última integral) . Si se coge el polinomio $1+x$ que da Taylor, la integral $\int_{-1}^1 dx\, (e^x-(1+x))^2 \approx 0.12120$, que es peor.

92. La solución es $u(x,t) = \sum_1^\infty c_n u_n(x,y)$, donde u_n es la solución fundamental dada por $u_n(x,y) = \cos(n-\frac{1}{2})\pi x \cdot \sinh(n-\frac{1}{2})\pi(1-y), \quad n \geq 1$. A su vez $c_n = a_n/\sinh(n-\frac{1}{2})\pi$, con a_n los coeficientes del desarrollo de Fourier en cosenos de $(1-x)^2$ en $[0,1]$. Las cuentas dicen que

$$a_n = \frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}\left[1 + \frac{2\,(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right], \quad n \geq 1.$$

Cosenos semienteros: $\cos\frac{\pi x}{2}, \cos\frac{3\pi x}{2}, \cdots$, que no quepa duda. $|u - s_2| \leq 0.20$.

93. La solución es

$$u(x,t) \sim x + \frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\, e^{-k^2\pi^2n^2t}\sin n\pi x.$$

Como todo el mundo sabe, $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ cuando n es un múltiplo de 3. Además, $(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{3} = \sqrt{3}/2$ cuando $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$, e igual a $-\sqrt{3}/2$ cuando $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$. La solución estacionaria o de equilibrio es $u = x$. Es la solución a tiempos grandes, a largo plazo. Comprobaría la solución en el libro para ver si está bien, pero no viene. Da igual, nunca me equivoco!

94. 1) $u(x,t) \sim 2x - \dfrac{32}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2n-1)\pi t/2}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$. 2) $u(1,2) = 3$, $u(x,1) = 2x$.

95. $u(x,t) = \dfrac{2t}{\pi} + 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{4}{\pi^3\, n^2(1-4n^2)}\left(1 - e^{-n^2\pi^2t}\right)\cos n\pi x$, ya que

$$\sin^{x\pi}$$

100. Separando $u = TX$ resulta para X la ecuación $X'' + 4X' + (4+\lambda)X = 0$, con las condiciones de contorno $X(0) = X(\pi) = 0$. Es una ecuación lineal de coeficientes constantes. Las únicas soluciones que satisfacen los datos y no son la solución cero corresponden a $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, con autofunción $X_n = e^{-2x} \sin nx$. La temperatura es pues

$$u(x,t) \sim \frac{4\, e^{-2x}}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{-(2p+1)^2 t}}{(2p+1)} \sin{(2p+1)x}.$$

La solución de equilibrio (hágase t tender a infinito) es $u \sim 0$. Al mirar la solución se ve claro que uno podría haber hecho al principio el cambio $u = e^{-2x} v$. Con este cambio v satisface una ecuación del calor sin más ni más. Con el dato inicial $u(x,0) = f(x)$ la solución es

$$u(x,t) \sim e^{-2x} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t} \sin nx, \quad \text{con} \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx\, f(x)\, e^{2x} \sin nx.$$

No hay más que justificar.

101. $u = e^{-t-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)}\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} x$

102. $u(r,\theta) = \frac{r^3}{9} + \frac{19}{9}$.

103. a) $u = 1 + \Big[\left(r + \frac{1}{r}\right) \arctan r - 1 + (1 - \frac{\pi}{2}) r \Big] \sin\theta$ b) $u = 1 + \Big[\left(r + \frac{1}{r}\right) \arctan r - 1 + \frac{1}{r} - \frac{r\pi}{2} \Big] \sin\theta$

El aviso que se daba era lo siguiente: en el exterior de un círculo es inusual que $u \sim \frac{r\pi}{2}$. Pero aquí no puede ser de otra manera pues es necesario compensar que $r \arctan r$ diverge como $\frac{r\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$. Se compensa restando el término que origina la divergencia. Un problema muy curioso.

104. b) **Sin** obtener la solución, sólo mirando cuanto vale u en la la frontera, se tiene que el máximo de u se alcanza en $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ para $r = b$, y en todos los puntos de $r = a$. El máximo vale 1. El mínimo se alcanza en $\theta = 0, \pi$ para $r = b$ (dos puntos) y vale 0.

a) $u = 1 - \frac{\ln r/a}{2 \ln a/b} - \frac{b^2}{2(b^4 - a^4)} \big(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\big) \cos 2\theta$.

106. a) $u(r,\theta) = \frac{\sin 3\theta}{3^6 - 1} \left(\frac{3^6}{r^3} - r^3 \right)$. b) De la frontera se ve que $u_{\max} = 1 = u(1, \pi/6) = u(1, 5\pi/6)$ y $u_{\min} = -1 = u(1, \pi/2)$.

107. $a = 1/4$ y la solución es $u = C + \frac{r^2}{8} + \frac{r^2}{8} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \cos 2\theta$, con C una constante arbitraria, Si a no es este valor, no hay solución acotada en el origen.

108. No hace falta reescribir la solución, ya está en el enunciado.

110. $u = \cos t \sin x + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2 - 4} \cos\frac{(2n-1)t}{2} \sin\frac{(2n-1)x}{2}$.

111. $u(x) = \dfrac{e^{-a|x|}}{2a}$. Para obtener este resultado mediante Transformadas de Fourier hay que suponer que u y su derivada tienden a cero en el infinito. Derivando esta solución se ve que se cumple $-u_{xx} + a^2 u = 0$ para cualquier x distinto de cero. La primera derivada de u tiene un salto en $x = 0$, ya que por la izquierda vale $1/2$ y por la derecha $-1/2$. Este salto origina la delta $\delta(x)$ del enunciado.

113. No es difícil pero hay que ser cuidadoso (nótese empero que nadie sacaría la fórmula de D'Alembert de esta manera, pero el ejercicio está muy bien propuesto como curiosidad). Basta con darse cuenta de que $\cos ckt$ es la transformada de Fourier de $\frac{1}{2}[\delta(x+ct) + \delta(x-ct)]$, y que $\dfrac{\sin ckt}{ck}$ es la de (ver figura). Sabiendo que el producto de dos transformadas viene de una convolución sale el resultado final.

114. a) Si $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$, entonces $F(0)$ es el área de la función $f(x)$ entre $(-\infty, \infty)$. O sea, el área de un triángulo de base $2a$ y de altura $1/a$. Luego, sin más cálculos $F(0) = 1$. También se obtiene este resultado con la transformada de Fourier, pues

$$F(k) = \frac{2}{a^2 k^2}(1 - \cos ka),$$

que se hace por partes. b) $\int_0^{\infty} dk\, \dfrac{1 - \cos ka}{k^2} = a\pi/2$

115. $u = e^{-\pi(x^2 - t^2/4)} \cos \pi x t$.

117. $u = \dfrac{x^2 + 8t^2 + 2t}{(4t+1)^3} e^{-(x^2+y^2)/(4t+1)}$. La única dificultad de este problema es calcular, con la ayuda dada, la integral $\int_{\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ikx - ax^2}$, y apañárselas después para calcular la transformada de Fourier inversa de todo lo que resulta. Es fácil, sin embargo. Nota: Yo derivaría la integral del enunciado con respecto a a para sacar la integral anterior. Eso se llama *derivación con respecto a un parámetro*.

120. $u = \dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{\sinh 2x \cos 2y}{2 \sinh 2\pi}$.

121. $u = 1 + \dfrac{3a}{r} \sin\theta$.

131. La solución es única e igual a $u = x^2/2 - y^2/4 + xy^2/2 + 1/4$. No hay posibilidad de tangencia a las características porque los vectores $(1, 0, 2x)$ y $(x, -2, x^2+1)$ no son paralelos para ningún x.

132. Es hiperbólica en todo el plano xy excepto en los ejes coordenados, así pues reducible a la forma $u_{rs} + \cdots = 0$. Canonical form: $u_{rs} - \dfrac{u_s}{2r} + \dfrac{1}{4s} = 0$, in the variables $r = xy$, $s = y/x$. The solution is $u = -\dfrac{r}{2} \ln s + r^{1/2} f(s) + g(r)$, f and g arbitrary good functions.

134. Sin hacer ni una cuenta se debe responder que $B_n = 0$ porque $x^{10} + 2x^8 + 4$ es par en el intervalo dado. Como los senos no lo son hay que quitarlos.

135. $u(x,t) \sim \dfrac{2l}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}, \quad 0 \leq x < l,\ t > 0.$