Ecuaciones Diferenciales II

http://teorica.fis.ucm.es/docenteft1.html

Los libros de donde se toman los ejercicios están indicados entre corchetes, así [M&T] es Marsden&Tromba, [Str] Strauss, [Sne] Sneddon, [PA] Puig Adam, [E] Elsgoltz, [PAr] Pepe Aranda apuntes PDE, [W] Weinberger, [Za] Zauderer, [To] Tolstov, etc.
Los problemas en **rojo** se proponen como ejercicios al alumno. Los problemas en negro los hago yo en clase. La solución de muchos de estos problemas se encuentra en la pagina web de la asignatura.

INTRODUCCIÓN Y GENERALIDADES

1. [Str, pg 5] For each of the following equations, state the order and whether it is nonlinear, linear inhomogeneous, or linear homogeneous; provide reasons.

   (a) $u_t - u_{xx} + 1 = 0$ (b) $u_t - u_{xx} + xu = 0$ (c) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0$ (d) $u_{tt} - u_{xx} + x^2 = 0$

   (e) $iu_t - u_{xx} + u/x = 0$ (f) $u_x(1 + u_x^2)^{-1/2} + u_y(1 + u_y^2)^{-1/2} = 0$ (g) $u_x + e^y u_y = 0$

   (h) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1 + u} = 0$

2. Sea la superficie $x = t + s, y = -t + s^2, z = t + s^3$ dada en forma paramétrica. Demostrar que

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3s^2 + 2s}{1 + 2s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3s^2 - 1}{1 + 2s}.$$

   Usando estas fórmulas comprobar que $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

3. [M&T, pg 447, 448] Encontrar la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto indicado

   (a) $x = u^2$, $y = u \sin e^v$, $z = \frac{1}{3} u \cos e^v$ en $(13, -2, 1)$

   • (b) $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$

   • (c) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = 1/3, z = 0$

4. Calcular la ecuación en derivadas parciales de primer orden cuya solución es (a) $z = f(x^2 + y^2)$ (esto es una superficie de revolución alrededor del eje z), siendo f una función arbitraria de clase adecuada (o sea, muy buena). Hacer lo mismo con

   (b) $z = xy + f(x^2 + y^2)$,

   (c) $z = f\left(\dfrac{xy}{z}\right)$,

   (d) $z = f(x - y)$,

   (e) $f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$.

   Este problema es de [Sne, pg 47], y el enunciado original era: "Eliminate the arbitrary function f from the equations", que traducido al español es: un profesor quiere poner un examen a un alumno y lo hace así: primero escribe la que va a ser la solución del problema, luego deduce la ecuación.

5. • En el ejercicio 3 del examen de Junio de 2009 había que resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} = \frac{2}{1+r^2}, \quad \text{donde} \quad f = f(r).$$

La solución de la ecuación homogénea es $c_1\, r + \dfrac{c_2}{r}$ (es una ecuación de Euler) donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Usar el *método de variación de constantes* para calcular la solución general de la ecuación dada. Si lo usáis de memoria, mejor. Si no, como podáis.

Comentario: A ojo no sale de ninguna manera una solución particular esta ecuación, de ninguna manera. Así que hay que tirar de variación de constantes. Cuando sale a ojo, no hay que usar variación de constantes, por supuesto.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN

6. [Str, pg 9] Solve $u_x + u_y + u = e^{x+2y}$ with $u(x,0) = 0$

7. [E, pg 252] Dada la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$, hallar la superficie integral que pasa por la curva directriz $x = s, y = s^2, z = s^3$. *Solución*: la superficie del problema 2.

8. [E, pg 284] Resolver las ecuaciones: a) $u_x + u_y + u_z = 0$, **b)** $xu_x + 2yu_y + 3zu_z = 4u$.

9. [Str, pg 9] Solve the equation $yu_x + xu_y = 0$ with the condition $u(0,y) = e^{-y^2}$. In which region of the xy plane is the solution uniquely determined?

10. [PAr] Sea $u_y - 2yu_x = 2yu$. Hallar la solución que satisface los datos de Cauchy: i) $u(x,1) = e^{-x}$, ii) $u(2y,y) = 0$, discutiendo la unicidad de las soluciones.

11. • [Examen Sep08] Sea la ecuación de primer orden

$$(1+u)u_x + yu_y = u.$$

i) ¿Es $c_2 = x - \ln y + u$ una característica? ¿Y $c_2 = x - \ln y - u$? c_2 es una constante arbitraria

ii) Calcular por el método de las características la solución general de la ecuación. *Aclaración 1*: En las ecuaciones no-lineales no se empeñe en despejar u, pierde su tiempo, se deja como sale.

iii) Calcular la solución que cumple $u(x,1) = x$. *Aclaración 2*: A veces hay que sacar la función arbitraria probando de dos manera. Pero no hay que asustarse por ello. Es una ecuación no-lineal, y puede pasar de casi todo.

12. • [Examen Sep09] Resolver por el método de las características los dos siguientes problemas:

i) $\begin{cases} u_t + e^t u_x + 2tu = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$, ii) $\begin{cases} u_t + e^t u_x + 2tu^2 = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$.

13. • [Examen Jun07] Sea la ecuación

$$yu_y - xu_x = u + 2x$$

y los datos de Cauchy i) $u(x,0) = -x$, ii) $u(x,2) = 7x$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

14. [Sne, pg 24] [Pfaffian Equations] Verify that the differential equation

$$(y^2 + yz)\,dx + (xz + z^2)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0$$

is integrable and find its primitive.

Hay un teorema que dice que una vez encontrado en una ecuación de Pfaff un factor integrante, uno puede encontrar una infinidad de ellos. ¿Sabría encontrar otro además del ya obtenido?

15. [E, pg 264] Integrar la ecuación (el campo vectorial de los coeficientes tiene torbellinos, pero pueden eliminarse)

$$yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0,$$

y obtener un factor integrante.

16. [Sne, pg 15] Find the integral curves of the set of equations:

(a) $\dfrac{dx}{x(y-z)} = \dfrac{dy}{y(z-x)} = \dfrac{dz}{z(x-y)}$,

(b) $\dfrac{adx}{(b-c)yz} = \dfrac{bdy}{(c-a)zx} = \dfrac{cdz}{(a-b)xy}$,

(c) $\dfrac{dx}{xz-y} = \dfrac{dy}{yz-x} = \dfrac{dz}{1-z^2}$.

Estos últimos, aunque estén en rojo, no hace falta que me los entreguéis.

Recogeré los problemas 11, 12, 13 junto a estos tres que siguen el Martes, 16 de Marzo. A los alumnos que les toque en la ruleta, se entiende.

17. • [Examen Jun06] Verificar que la ecuación diferencial

$$(y + a)^2\,dx + z\,dy - (y + a)\,dz = 0$$

(a es una constante) es integrable y encontrar su primitiva. ¿Cuál es el factor integrante?

18. • [Examen Jun08] De las dos siguientes ecuaciones Pfaffianas una es resoluble y la otra no. Verifique y señale cuál es cuál. Integrar la resoluble y encontrar su primitiva, además del factor integrante.

$$y\,dx + x\,dy + y\,dz = 0, \qquad -y\,dx + x\,dy + x^2 z\,dz = 0$$

19. • [Examen Jun09] i) Calcular la constante a para que la ecuación de Pfaff

$$3y^2\,dx - a\,xy\,dy + x^4\,dz = 0$$

sea integrable. ii) Resolver la ecuación para ese valor de a y hallar un factor integrante.

20. Resolver por series de potencias (i.e., Kovalévskaia) el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2 \\ u_t(x,0) = -1. \end{cases}$$

21. ¿Qué hipótesis del teorema de Kovalévskaia no cumple la ecuación $u_{tt} + 2u_{xt} = 2$ con los datos $u(0,t) = 0, u_x(0,t) = t$? De hecho este problema tiene infinitas soluciones analíticas en $x = 0$, así que por alguna razón el teorema no es aplicable.

22. La ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ya está escrita en su forma canónica. Sin embargo, admitiendo características complejas se puede demostrar que la solución general de esta ecuacion es $u = f(x+iy) + g(x-iy)$, donde f y g son funciones arbitrarias. Ver que esto es así.

    Comentario: A las soluciones de esta ecuación en cualquier dimensión se les denomina *funciones armónicas.*

23. • [Examen Sep07] Calcular $u(x,t)$ sabiendo que $u_{tt} - 4u_{xx} = 16$ y que $u(0,t) = t, u_x(0,t) = 0$.

    Sugerencia: Sale de muchas maneras: haciendo uso de D'Alembert, por Kovalevskaia, reduciendo a la forma canónica, etc. Hacedlo esta vez con la fórmula deD'Alembert, para practicar.

24. [PAr] Escribir $u_{tt} + 2u_{xt} = 2$ en forma canónica y hallar su solución general. De los datos de Cauchy: i) $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, ii) $u(0,t) = 0, u_x(0,t) = t$, hay unos que determinan una única solución de la ecuación diferencial. Hállese en ese caso.

25. Decir de qué tipo es la *ecuación de Tricomi* $u_{yy} - yu_{xx} = 0$ en las diferentes regiones del plano, escribiendo en cada una de ellas su forma canónica.

    Esta ecuación describe objetos moviéndose a velocidades supersónicas. Descubierta en 1923 cuando aún no había aviones que volaran más deprisa que el sonido, ha jugado un papel decisivo en el estudio de los vuelos supersónicos.

26. • [Za, pg 151] Show that the equation

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 3u_x - u_y + 2u = 0$$

    is of hyperbolic type. Determine its characteristics curves and bring it to the canonical form $u_{rs} + \cdots = 0$. Introduce the further transformation $u(r,s) = e^{pr+qs}\,w(r,s)$ and choose the constants p, q to eliminate the first derivative terms in the resulting canonical form.

27. [PAr] Sea (E) la ecuación

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x,y) \qquad \text{(E)}$$

    con $A, B, \dots, F$ constantes. Probar que si (E) no es parabólica un cambio de variables $u = e^{px+qy}w$ con p, q constantes adecuadas, lleva (E) a una ecuación (E*) en la que no existen derivadas de primer orden. ¿Para qué relación entre las constantes $A, \dots, F$ no tiene (E*) término en w? Aplicar lo anterior para hallar la solución general de $u_{xy} + 3u_x + 2u_y + 6u = 1$. Probar que cualquier ecuación parabólica de coeficientes constantes o es resoluble o se puede escribir mediante cambios de variable en la forma $w_{ss} + D^* w_r = G^{**}(r,s)$ (como la del calor).

28. • [Sne, pg 109] Reduce the equation

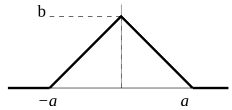
$$(n-1)^2 z_{xx} - y^{2n} z_{yy} = ny^{2n-1} z_y, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

    to its canonical form, and find its general solution.

29. • [Sne, pg 109] [Examen Sep06] Reduce the equation

$$y^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + x^2 z_{yy} = \frac{y^2}{x} z_x + \frac{x^2}{y} z_y$$

    to its canonical form, and hence solve it.

30. • [Str, pg 35] Solve the plucked string, i.e., the wave equation with initial data $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$, where $f(x) =$ 

. Calculate $u(x, a/2c)$, $u(x, a/c)$ and $u(x, 2a/c)$.

31. • [Examen Sep07] Demostrar de manera sencilla (no hace falta calcular la solución!) que el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \\ u_x(1, y) = f(y), \\ u_x(0, y) = u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, \end{cases}$$

tiene solución sólo si $\int_0^1 dy\, f(y) = 0$.

32. • Demostrar que si A, B, C, D son constantes, el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (0,1) \times (0,1) \\ u_x(0, y) = A, \quad u_x(1, y) = B, \quad u_y(x, 0) = C, \quad u_y(x, 1) = D \end{cases}$$

sólo tiene solución si se satisface la relación $A - B + C - D = 0$ (que no es más que un balance energético, como siempre). No hace falta calcular la solución para obtener este resultado.

33. Dado el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - t^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au = F, \quad 0 < x < 1,\, t > 0 \\ u(0, t) = f_0, u(1, t) = f_1 \\ u(x, 0) = u_0, \end{cases}$$

donde F, f_0, f_1, u_0 son funciones dadas de x, t, se pide:

(a) Completar cada línea con la indicación del dominio correspondiente. Dibujar el recinto del problema e indicar qué es cada línea del problema.

(b) Demostrar unicidad (por Green) para ciertos valores de a, ¿cuáles? (*Indicación*: escribir con detalle la fórmula de Green en este caso).

34. [Str,pg 44] Consider the solution $1 - x^2 - 2kt$ of the diffusion equation. Find the locations of its maximum and its minimum in the closed rectangle $\{0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq t \leq T\}$.

35. • [Str,pg 45] The purpose of this exercise is to show that the maximum and minimum principle is not true for the equation $u_t = xu_{xx}$, which has a variable coefficient.

(a) Verify that $u = -2xt - x^2$ is a solution. Find the location of its maximum in the rectangle $\{-2 \leq x \leq 2,\, 0 \leq t \leq 1\}$.

(b) Where precisely does our proof of the maximum principle break down for this equation?

36. [W, pg 54] Show that the problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^x \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^y \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u = x^2, \qquad\qquad\qquad\qquad x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

has at most one solution.

[Hint]: Use the divergence theorem to derive an energy identity

[Hint-mía]: Escribir la ecuación que satisface $w = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 soluciones del problema dado. Para demostrar unicidad basta multiplicar por w la ecuación obtenida e integrar. Las condiciones de contorno tienen mucho que decir en el resultado de la integral, como bien sabemos. Estaremos usando el teorema de la divergencia como dice el Prof. W., aunque no lo digamos.

37. [Str, pg 163] (Funciones armónicas) Suppose that u is a harmonic function in the disk $D = \{r < 2\}$ and that $u = 3\sin 2\theta + 1$ for $r = 2$. Without finding the solution, answer the following questions.

    (a) Find the maximum value of u in $\overline{D}$.

    (b) Calculate the value of u at the origin. (Esta parte (b) la hago yo en clase)

    Nota: Problema puesto en el examen de Junio de 2006

38. • [PAr] El problema

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, \quad 0 < x < \pi, \ -\pi/4 < y < \pi/4 \\ u_y(x, -\pi/4) = u_y(x, \pi/4) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \sin 2y, \quad -\pi/4 \leq y \leq \pi/4 \end{cases}$$

    no tiene solución única (basta ver que la solución, calculada por separación de variables, es $u = C\sin x + \dfrac{\sinh\sqrt{3}x}{\sinh\sqrt{3}\pi}\sin 2y$, donde C es una constante arbitraria).

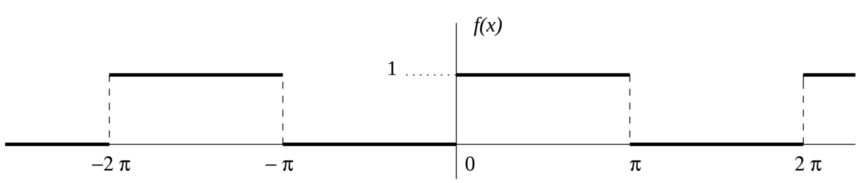
    Demostrar que la fórmula de Green (escriba con detalle la fórmula de Green en este caso) no puede demostrar unicidad–dicho en palabras corrientes, que Green se encoge de hombros y dice 'No puedo concluir nada..., lo siento'

39. • [Examen Sep09] Sea $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ y sea $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Hallar los valores máximos y mínimos de u en D y los puntos en los que se alcanzan estos valores.

Recogeré los problemas 23, 28, 29, 32, 38 39 el jueves 8 de Abril. Los otros marcados en rojo no son para entregar.

SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER

40. [Boas, pg 310] Expand in a Fourier series the function $f(x)$ sketched in the next figure. This function might represent, for example, a periodic voltage pulse. The terms in our Fourier series would then correspond to the different a-c frequencies which are combined in this 'square wave' voltage, and the magnitude of the Fourier coefficients would indicate the relative importance of the various frequencies.



41. [W, pg 87] Hallar la serie de Fourier de $f(x) = e^x$ en $-\pi < x < \pi$. Hallar la suma de dicha serie en $x = \pi$.

42. [Str, pg 131] Find the Fourier sine series of $f(x) = x$ on the interval $(0, l)$. Apply Parseval's identity to find the sum $\sum_1^\infty 1/n^2$.

43. • [Str, pg 131] Find the Fourier cosine series of $f(x) = x^2$ on the interval $(0, l)$. Apply Parseval's identity to find the sum $\sum_1^\infty 1/n^4$.

44. • [Str, pg 130] & [To, pg 40] Find the sine Fourier series of the function $\cos x$ on the interval $(0, \pi)$. For each x satisfying $-\pi \le x \le \pi$, what is the sum of the series?

    Consejo: **No** pasar de ninguna manera las series de Fourier sin hacer este problema!

45. [Examen Sep07] Calcular la serie de Fourier de $|\sin x|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Usar el resultado anterior para evaluar $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{4n^2-1}$.

    Sol: $|\sin x| \sim \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2^2-1}\cos 2x + \dfrac{1}{4^2-1}\cos 4x + \dfrac{1}{6^2-1}\cos 6x + \cdots\right)$, $-\pi \le x \le \pi$. La suma pedida es $1/2$.

46. [Examen Jun08] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ -2 & 1 < x < 2 \end{cases}$.

    a) Dibujar al menos tres períodos de la función representada por la serie de senos de $f(x)$, y sin calcular ningún coeficiente responder a las siguientes preguntas: ¿A qué valor converge la **serie** en $x = 1$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = 0$? ¿Y en $x = -1$?

    b) Si la función se continúa con período 2 (dibújela, por favor, tres períodos al menos) y se representa por la serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x),$$

    ¿cuánto vale $\sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2)$? (aquí le pido el valor numérico, no una expresión).

    Sol: a) $-1/2$, 0, 0 (es serie de de senos!), $1/2$ b) Parseval dice que: $\sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2) = 77/24$

47. [Str, pg 108] Given the Fourier sine series of $f(x) = x$ on $(0, l)$

$$x \sim \frac{2l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} - \cdots\right),$$

    assume that the series can be integrated term by term (a fact that Strauss shows later in his book).

    (a) Find the Fourier cosine series of the function $x^2/2$. Find the constant of integration that will be the first term in the cosine series.

    (b) By setting $x = 0$ in your result, find the *sum* of the series $\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

48. [Examen Jun09] Sea el desarrollo de $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ en $(0, 1)$ dado por

$$\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^\infty \frac{4\cos n\pi x}{\pi(1-4n^2)}.$$

    a) encuentre el período de la serie y dibuje la extensión de la función $\sin\dfrac{\pi x}{2}$ que representa (dibuje tres períodos al menos, por favor).

b) Según los teoremas de convergencia puntual de series trigonométricas, ¿cuanto vale la serie en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$? Halle el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}$.

c) Suponiendo que la igualdad del enunciado puede integrarse término a término, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi x}{n\pi\,(1-4n^2)}$ en $0 \le x \le 1$ **y en** $-1 \le x \le 0$.

Sol: a) $T = 2$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi x}{n\pi\,(1-4n^2)} = \begin{cases} 1 - \cos\frac{\pi x}{2} - x, & 0 \le x \le 1, \\ -1 + \cos\frac{\pi x}{2} - x, & -1 \le x \le 0. \end{cases}$

49. • [Str, pg 114] Let $f(x)$ be a function of period π. If $f(x) \sim \sum_1^{\infty} b_n \sin nx$ for all x , find the odd coefficients $b_1, b_3, \ldots$.

50. • [To, pg 40] Find the series (a) $\sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, (b) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$, (c) $\sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, (d) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$ by using the following result: expand $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $(-\pi < x < \pi)$, where A, B, C are constants in Fourier series. The graph of $f(x)$ is a parabola. By periodic extension, we can obtain a continuous or a discontinuous function, depending on the choice of the constants A, B, and C. If your expansion is correct you shall obtain

$$Ax^2 + Bx + C \sim \frac{A\pi^2}{3} + C + 4A \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} - 2B \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}, \qquad -\pi < x < \pi$$

Use this result to calculate the series.

51. • [MJRP] Let $f(x)$ be a function such that $f(x) = -f(x - 2\pi/3)$. Expand $f(x)$ in a full Fourier series. From your result give some examples of functions that satisfy the above relation.

[Hint]: $2\pi/3$ is not the period of $f(x)$. Find the period and expand.

Los cinco problemas marcados en rojo en esta sección los recogeré el 29 de Abril. El parcial de la asignatura será el próximo 6 de Mayo, a las 15.30h. La convocatoria la pondré en el tablón de anuncios de Teorica I. El aula puede cambiar a mejor en el último momento. Entrarán los cuatro primeros temas y la lectura obligatoria

PROBLEMAS DE CONTORNO Y ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES

52. [Str, pg 118] (a) On the interval $[-1, 1]$, show that the function x is orthogonal to the constant functions.

(b) Find a quadratic polynomial that is orthogonal to both 1 and x.

(c) Find a cubic polynomial that is orthogonal to all quadratics. (These are the first few *Legendre polynomials.*)

53. [Examen Sep08] Sean los polinomios

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x - a \\ P_2 &= x^2 + bx + 1/6 \end{aligned}$$

donde a y b son constantes.

a) Determinar a y b de manera que $\{P_0, P_1, P_2\}$ sean ortogonales en $[0, 1]$ con peso=1.

b) Calcular la combinación lineal de los tres polinomios anteriores (tome como constantes a, b las obtenidas en el apartado anterior) que mejor aproxime en $[0, 1]$ a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

en el sentido de *least squares* ("media cuadrática", en español).

c) La función $f(x)$ es discontinua en $x = 1/2$, pero la combinación lineal calculada en b) no lo es. ¿Qué valor toma en este punto la combinación lineal? ¿Está de acuerdo dicho valor con el valor de una serie de Fourier en las discontinuidades de la función a la que representa?

54. [Str, pg 98] On the interval $0 \leq x \leq 1$, consider the eigenvalue problem

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) + u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

(absorption at one end and zero at the other) (a) Find an eigenfunction with eigenvalue zero. Call it $u_0(x)$.

(b) Find an equation for the positive eigenvalues $\lambda = \omega^2$, and show **graphically** that there are an infinite number of positive eigenvalues.

(c) Is there a negative eigenvalue?

55. Resolver el problema de contorno propuesto en el ejercicio 54. Desarrollar $f(x) = 1$ en serie de las autofunciones obtenidas.

Nota: El problema 2 de [W, pg 180] es básicamente éste.

56. • [W, pg 72] Find the best approximation of the form $a + bx$ in the sense of least squares on the interval $-1 \leq x \leq 1$ to the function $f(x) = e^x$.

57. • [W, pg 73] Find the polynomial of degree 2 which best approximates $\sin x$ on the interval $(0, 1)$ in the sense of least squares with $\rho(x) = 1$.

Hint: Use the results of the following exercise: We define the polynomials $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots$ by requiring that p_n be a polynomial of degree n with the coefficient of x^n equal to one, and that $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots$ be orthogonal in the interval $(0, 1)$ with respect to $\rho(x) = 1$. Find $p_0(x)$, $p_1(x)$ and $p_2(x)$.

SEPARACIÓN DE VARIABLES

58. [Str, pg 108] A rod (varilla) has length $l = 1$ and its temperature satisfies the heat equation. Its left end is held at temperature 0, its right end at temperature 1. Initially (at $t = 0$) the temperature is given by

$$u(x, 0) = \begin{cases} 5x/2, & 0 < x < 2/3 \\ 3 - 2x, & 2/3 < x < 1. \end{cases}$$

Find the solution, including the coefficients.

Hint: First find the equilibrium solution $\bar{u}(x)$, and then solve the heat equation with initial condition $u(x, 0) - \bar{u}(x)$.

59. [Examen Jun07] Encontrar por separación de variables la función $u(x,t)$ que satisface las condiciones

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & 0 < x < 1/2,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1 - 2x, \\ u_x(0,t) = u(1/2,t) = 0. \end{cases}$$

Sol: $u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\, e^{-t^2-(2n-1)^2\pi^2 t} \cos(2n-1)\pi x$

60. [Examen Sep09] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2\sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}, \quad u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Comprobar que $u(x,\pi) = -\sin x$.

Sol: $u = \cos t \sin x + \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2 - 4} \cos \dfrac{(2n-1)t}{2} \sin \dfrac{(2n-1)x}{2}$

61. [MJRP] Demostrar que si A, B, C, D son constantes, el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (0,1) \times (0,1) \\ u_x(0,y) = A, \quad u_x(1,y) = B, \quad u_y(x,0) = C, \quad u_y(x,1) = D \end{cases}$$

sólo tiene solución si se satisface la relación $A - B + C - D = 0$ (que no es más que un balance energético, como siempre). Encontrar que en ese caso la solución es igual a $u(x,y) = -(A-B)\,x^2/2 - (C-D)\,y^2/2 + Ax + Cy + E$, donde E es una constante arbitraria.

Sugerencia: Aunque el problema sea lineal, no lo rompa en cuatro problemas, ni siquiera en dos! Este es uno de esos casos en que la 'rotura' no funciona. Limítese a llevar las condiciones de contorno a cero y continúe como siempre.

62. [PAr] Resolver usando separación de variables

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = \cos t, \quad t > 0. \end{cases}$$

63. [PAr] Resolver la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u = x - a, \quad (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0. \end{cases}$$

Comentario: La condición en el borde del cuadrado (las parciales igual a cero) indican extremos aislados.

64. • [W, pg 106] Resolver la ecuación de Laplace en el cuadrado con las siguientes condiciones de contorno mixtas

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \\ u(x,0) = (1-x)^2, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ u_x(0,y) = u(1,y) = 0, \quad 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Para avanzados: Hallar una cota del error $|u(x,y) - s_2(x,y)|$.

65. • [PAr] Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = A, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = B, \quad 0 \le x \le 1 \\ u_x(0,t) = C,\ u_x(1,t) = D, \quad t > 0, \end{cases}$$

donde A, B, C, D son constantes arbitrarias. (a) Resolverlo usando separación de variables. (b) Determinar la relación entre las constantes para que exista una solución estacionaria y calcularla. (c) Dar una interpretación física de la relación obtenida en (b).

Nota: Este problema lo puse en el examen de Junio de 2006.

66. • [Str, pg 158] Find the harmonic function in the square $D = \{0 < x, y < \pi\}$ with the boundary conditions

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \cos^2 y = \frac{1}{2}(1+\cos 2y), \quad 0 \le y \le \pi \\ u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Nota: Este problema lo puse en el examen de Septiembre de 2006.

67. • [Examen Jun08] Sea

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,2),\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 4. \end{cases}$$

1) Resolver por separación de variables

2) Sabiendo que $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$, calcular $u(1,2)$. ¿Cuánto vale $u(x,1)$?

Sol: 1) $u(x,t) \sim 2x - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t/2}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x.$ 2) $u(1,2) = 3,\ u(x,1) = 2x.$

68. [PAr] Resolver la ecuación

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-2x}, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Una vez resuelta decir cuál sería la solución en el caso en que el dato inicial fuera $u(x,0) = f(x)$, con una $f(x)$ arbitraria pero buena.

69. • [Examen Jun09] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x} \\ u(0,t) = u(1,t) + u_x(1,t) = 0. \end{cases}$$

(Puede hacer el problema directamente o después de hacer el cambio de variables $u = e^{pt+qx}w$, p y q constantes a determinar, que lleve la ecuación a otra más sencilla)

Sol: $u = e^{-t-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$

70. • [PAr] Resolver por separación de variables la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, \quad 0 < x < \pi,\ -\pi/4 < y < \pi/4 \\ u_y(x,-\pi/4) = u_y(x,\pi/4) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = \sin 2y, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4. \end{cases}$$

A la vista del resultado obtenido, ¿es única la solución?

Nota: Esta ecuación se llama de Helmholtz

71. [PAr] Resolver la siguiente ecuación de Poisson en el disco unidad

$$\begin{cases} \Delta u = 4, \quad r < 1 \\ u(1,\theta) = \cos 2\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Sugerencia: Como la inhomogeneidad de la solución es sólo una constante (el 4), lo mejor es sacar a ojo una solución particular fácil de $\Delta u = 4$ que sea $2\pi-$periódica (si no lo es, no vale, porque destrozaría el problema de contorno) y luego sumarle a la solución fácil la solución de Laplace en el interior de un disco con condiciones de contorno periódicas.

72. Resolver en polares

$$\begin{cases} \Delta u = r, \quad r < 2,\ 0 < \theta < \pi \\ u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0 \\ u(2,\theta) = 3. \end{cases}$$

Pintar bien el recinto. Ver la sugerencia del problema 71 para resolverlo.

73. • Resolver y dibujar el dominio.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 < r < 3 \\ u(1,\theta) = \sin 3\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi \\ u(3,\theta) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \quad 1 \le r \le 3 \end{cases}$$

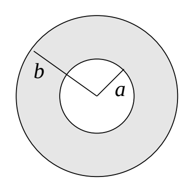
Nota: Problema del examen de Junio de 2006.

74. • [Examen Jun08] a) Hallar por separación de variables la única solución del siguiente problema en el plano

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 1,\ \theta \in (0,\pi) \\ u(1,\theta) + 2u_r(1,\theta) = 4\sin\dfrac{3\theta}{2} \\ u(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0. \end{cases}$$

b) Si se cambia $+2u_r(1,\theta)$ por $-2u_r(1,\theta)$, el problema tiene infinitas soluciones. Calcular estas soluciones.

75. [Examen Sep08] a) Calcular la única función armónica del plano que en la corona circular de la figura ($0 < a < r < b$) toma los valores $u(a,\theta) = 1$, $u(b,\theta) = \sin^2\theta$.



b) Decir en qué puntos del plano alcanza $u(r,\theta)$ su valor máximo y mínimo.

76. • [Str, pg 167] The exterior of a circle. Solve $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in the exterior $\{r > a\}$ of a disk with the boundary condition $u = 1 + 3\sin\theta$ on $r = a$, and the condition at infinity that u be bounded as $r \to \infty$.

Nota: Problema como el del examen de Septiembre de 2007.

77. • [Examen Jun09] Hallar la única solución **acotada** $u(r,\theta)$ del problema en el plano

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \dfrac{2\sin\theta}{1+r^2} \quad , \\ u(1,\theta) = 1 \end{cases}$$

a) en el círculo $r < 1$, b) en el exterior del círculo $r > 1$. *Atención!!* $r \arctan r \to \infty$ si $r \to \infty$

Sol: a) $u = 1 + \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \arctan r - 1 + (1 - \frac{\pi}{2}) r \right] \sin\theta$ b) $u = 1 + \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \arctan r - 1 + \frac{1}{r} - \frac{r\pi}{2}) \right] \sin\theta$

El aviso que se daba era lo siguiente: en el exterior de un círculo es inusual que $u \sim \frac{r\pi}{2}$. Pero aquí no puede ser de otra manera pues es necesario compensar que $r \arctan r$ diverge como $\frac{r\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$. Se compensa restanto el término que origina la divergencia.

78. • Resolver por separación de variables

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin \dfrac{\pi x}{2}, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

Haced, por favor, todos los problemas marcados en rojo. Para entregarme a mí son los números 56, 66, 70, 74 y 77. El día de la entrega será el 1 de Junio. Cuando los tenga corregidos lo anunciaré en *Comunicados y avisos*, y os pasáis por mi despacho a recogerlos.

TRANSFORMADAS DE FOURIER

79. [Str, pg 330] Use Fourier transforms to solve the ODE $-u_{xx} + a^2 u = \delta$, where δ is the delta function.

80. [Problema del calor en una varilla infinita] Resuelva

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

con la condición de que u esté acotada en el infinito.

81. [Examen Sep07] Resolver

$$\begin{cases} 2u_t + u_x = tu \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$

1) utilizando las características

2) con la transformada de Fourier.

82. Obtener la *fórmula de D'Alembert* usando transformadas de Fourier para resolver

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

83. [Examen Jun07] Hallar el valor de la integral

$$\int_0^\infty d\alpha \, \frac{1 - \cos \pi\alpha}{\alpha} \sin\alpha$$

como se indica a continuación:

1) Calcular la *transformada de Fourier* $F(k)$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

2) Substituir $F(k)$ en la fórmula de la *transformada de Fourier inversa* escribiendo $f(x)$ como una integral.

3) Utilizar la integral del apartado anterior para evaluar la integral del enunciado.

Sol: La integral vale $\pi/2$.

84. • [Examen Jun09] a) Calcular la transformada de Fourier $F(k)$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -a, \quad x \geq a, \\ (a+x)/a^2 & -a \leq x \leq 0 \\ (a-x)/a^2 & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

(quizás encuentre usted útil dibujar $f(x)$). ¿Cuál es el valor de $F(k)$ cuando $k = 0$? ¿Hay alguna razón para el valor de $F(0)$ en términos geométricos?

b) Aplicando la transformada de Fourier inversa al resultado obtenido en a), exprese $f(x)$ como una integral en la variable k y deduzca el valor de

$$\int_0^\infty dk \, \frac{1 - \cos ka}{k^2}$$

Nota: Antes de empezar el problema escriba **claramente** la definición de *transformada de Fourier* que usted va a utilizar.

Sol: a) Si $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} f(x)$, entonces $F(0)$ es el área de la función $f(x)$ entre $(-\infty, \infty)$. O sea, el área de un triángulo de base $2a$ y de altura $1/a$. Luego, sin más cálculos $F(0) = 1$. También se obtiene este resultado con la transformada de Fourier, pues

$$F(k) = \frac{2}{a^2k^2}(1 - \cos ka),$$

que se hace por partes. b) $\int_0^\infty dk \, \dfrac{1 - \cos ka}{k^2} = a\pi/2$

85. [MJRP] Sea el problema

$$\begin{cases} u_t + a^2 u_{xxxx} = 0, & -\infty < x < \infty, \, t > 0 \\ u(x, 0) = \delta(x), \end{cases}$$

donde a es una constante real y $\delta(x)$ la *función* delta de Dirac.

(a) Hallar mediante la transformada de Fourier la solución $u(x,t)$ que está acotada. Dejad la solución expresada mediante una integral, que no hay que resolver porque no sabéis.

(b) Calcular $u_{xxx}(0, t)$. Esta integral sí sabéis hacerla.

Ayuda: Recordad que $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x) f(x) = f(0)$.

86. [Examen Sep01] Resolver mediante la transformada de Fourier el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, & -\infty < x, \, y < \infty, \; t > 0 \\ u(x, y, 0) = x^2 e^{-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

Ayuda: $\int_{\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx - ax^2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$, si $a > 0$. Ya se ve de este problema que la transformada de Fourier se emplea también para problemas en varias dimensiones, no sólo en una.