UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

5 de Junio de 2006

Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2005/06

1. [1 punto] Sea u una función armónica en el disco $D = \{r < 2\}$ del plano y tal que $u = 3\sin 2\theta + 1$ cuando $r = 2$. **Sin** calcular la solución, responder a las siguientes cuestiones:

   (a) Encontrar el valor máximo de u en $\bar{D}$ (o sea, en el círculo) y en qué punto o puntos se alcanza dicho valor.

   (b) Calcular el valor de u en el origen.

2. [3 puntos] Sea el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = A, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = B, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0,t) = C,\ u_x(1,t) = D, \quad t > 0, \end{cases}$$

   donde A, B, C, D son constantes arbitrarias. (a) Resolverlo usando separación de variables. (b) Determinar la relación entre las constantes para que exista una solución estacionaria y calcularla. (c) Dar una interpretación física de la relación obtenida en (b).

3. [2 puntos] Verificar que la ecuación diferencial

$$(y+a)^2\,dx + z\,dy - (y+a)\,dz = 0$$

   (a es una constante) es integrable y encontrar su primitiva. ¿Cuál es el factor integrante?

4. [2.5 puntos]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 < r < 3 \\ u(1,\theta) = \sin 3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ u(3,\theta) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0 \quad 1 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

   Resolver este problema (Dibujar el dominio).

5. [1.5 puntos]

   1) Deducir la ecuación de ondas unidimensional.

   2) Fórmula de D'Alembert.

55% de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

5 de Septiembre de 2006

Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2005/06

1. [2.5 puntos] Sea la ecuación

$$y^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = \frac{y^2}{x} u_x + \frac{x^2}{y} u_y.$$

(a) ¿Es parabólica, hiperbólica o elíptica?

(b) Reducir a su forma canónica y resolver.

(c) Intercambiar x e y en la solución obtenida en (b). La función que resulta, ¿sigue siendo solución de la ecuación? Razonar la respuesta (se pide **razonar** la respuesta, **no** comprobar si es o no solución).

2. [3 puntos] Encontrar la función $u(x, y)$ que satisface las condiciones

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < \pi, \\ u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \cos^2 y = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2y), \quad 0 \le y \le \pi \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Dibujar el recinto de integración.

3. [2 puntos] Hallar la solución de la ecuación de primer orden

$$u_x + 2xy^2 u_y = u$$

que satisface el dato de Cauchy $u(0, y) = y$.

4. [2.5 puntos] Sea el problema

$$\begin{cases} u_t + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \, t > 0 \\ u(x, 0) = \delta(x), \end{cases}$$

donde a es una constante real y $\delta(x)$ la *función* delta de Dirac.

(a) Hallar mediante la transformada de Fourier la solución $u(x, t)$ que está acotada. Dejad la solución expresada mediante una integral, que no hay que resolver porque no sabéis.

(b) Calcular $u_{xxx}(0, t)$. Esta integral sí sabéis hacerla.

Ayuda: Recordad que $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x) f(x) = f(0)$.

70% de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

20 de Junio de 2007

Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2006/07

1. [1 punto] Probar (mediante integración por partes, por ejemplo) que el problema de contorno
$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0, \\ u'(1) + u(1) = 0, \end{cases}$$
tiene todos los λ positivos.

2. [2 puntos] Resolver este problema (dibujar el dominio).
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \sin\theta, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \theta < 2\pi \\ u_r(1,\theta) = u(2,\theta) = 0. \end{cases}$$
Sol: $u = \frac{1}{3}(r^2 - 2r)\sin\theta$. Se trata de una corona circular.

3. [2.5 puntos] Sea la ecuación
$$yu_y - xu_x = u + 2x$$
y los datos de Cauchy i) $u(x,0) = -x$, ii) $u(x,2) = 7x$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

4. [2.5 puntos] Encontrar por separación de variables la función $u(x,t)$ que satisface las condiciones
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, \quad 0 < x < 1/2, \ t > 0 \\ u(x,0) = 1 - 2x, \\ u_x(0,t) = u(1/2,t) = 0. \end{cases}$$
Sol: $u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\, e^{-t^2-(2n-1)^2\pi^2 t} \cos(2n-1)\pi x$

5. [2 puntos] Hallar el valor la integral
$$\int_0^\infty d\alpha\, \frac{1-\cos\pi\alpha}{\alpha} \sin\alpha$$
como se indica a continuación:

   1) Calcular la *transformada de Fourier* $F(k)$ de la función
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$
   2) Substituir $F(k)$ en la fórmula de la *transformada de Fourier inversa* escribiendo $f(x)$ como una integral.

   3) Utilizar la integral del apartado anterior para evaluar la integral del enunciado.

   Sol: La integral vale $\pi/2$.

27% de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

18 de Septiembre de 2007

Examen de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2006/07

Consejo muy útil: Siempre que sea **razonable** es conveniente comprobar los resultados.

1. [2 puntos] Calcular la serie de Fourier de $|\sin x|$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Usar el resultado anterior para evaluar $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

   Sol: $|\sin x| \sim \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{2^2-1}\cos 2x + \dfrac{1}{4^2-1}\cos 4x + \dfrac{1}{6^2-1}\cos 6x + \cdots\right)$, $-\pi \leq x \leq \pi$. La suma pedida es $1/2$.

2. [1 punto] Demostrar de manera sencilla (no hace falta calcular la solución!) que el problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x, y < 1 \\ u_x(1, y) = f(y), \\ u_x(0, y) = u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, \end{cases}$$

   tiene solución sólo si $\int_0^1 dy\, f(y) = 0$.

3. [2 puntos] Calcular $u(x, t)$ sabiendo que $u_{tt} - 4u_{xx} = 16$ y que $u(0, t) = t, u_x(0, t) = 0$.

   Sugerencia: Sale de muchas maneras... haciendo uso de D'Alembert, por Kovalevskaia, reduciendo a la forma canónica, etc.

4. [2 puntos] Resolver $\Delta u = 0$ en el **exterior** $\{r > a\}$ **de un círculo** con la condición de contorno $u(a, \theta) = 1 + 5\sin^2\theta$, y la condición de que u esté acotada en el infinito. Dibujar el recinto de integración.

   Sol: $\dfrac{7}{2} - \dfrac{5a^2}{r^2}\cos 2\theta$.

5. [1.5+1.5 puntos] Resolver

$$\begin{cases} 2u_t + u_x = tu \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, \end{cases}$$

   1) utilizando las características

   2) con la transformada de Fourier.

56% de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

27 de Junio de 2008

Examen de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2007/08

Consejo muy útil: Siempre que sea **razonable** es conveniente comprobar los resultados.

1. [2 puntos] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ -2 & 1 < x < 2 \end{cases}$.

   a) Dibujar al menos **tres** períodos de la función representada por la serie de senos de $f(x)$, y **sin calcular** ningún coeficiente responder a las siguientes preguntas: ¿A qué valor converge la serie en $x = 1$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = 0$? ¿Y en $x = -1$?

   b) Si la función se continúa con período 2 (dibújela, por favor, tres períodos al menos) y se representa por la serie

   $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x),$$

   ¿cuánto vale $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$? (aquí le pido el valor numérico, no una expresión).

   Sol: b) Parseval dice que: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 77/24$

2. [2 puntos] De las dos siguientes ecuaciones Pfaffianas una es resoluble y la otra no. Verifique y señale cuál es cuál. Integrar la resoluble y encontrar su primitiva, además del factor integrante.

   $$y\,dx + x\,dy + y\,dz = 0, \qquad -y\,dx + x\,dy + x^2 z\,dz = 0$$

   Sol: La primera no es integrable. La segunda sí: $u = \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{y}{x} = k$. Factor integrante: $\mu = 1/x^2$

3. [1.5 puntos] Sea $u(x,t)$ una función definida en $\bar{D} = [0,1] \times [0,3]$ tal que

   $$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{en } D \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = -t \\ u(1,t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t. \end{cases}$$

   Determinar el máximo y mínimo de u en $\bar{D}$ indicando los puntos donde se alcanzan esos valores.

4. [2 puntos] a) Hallar por separación de variables la única solución del siguiente problema en el plano

   $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 1,\ \theta \in (0,\pi) \\ u(1,\theta) + 2u_r(1,\theta) = 4 \sin \dfrac{3\theta}{2} \\ u(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0. \end{cases}$$

   b) Si se cambia $+2u_r(1,\theta)$ por $-2u_r(1,\theta)$, el problema tiene infinitas soluciones. Calcular estas soluciones.

   Sol: a) $u = r^{3/2} \sin \dfrac{3\theta}{2}$. b) $u = b_1 r^{1/2} \sin \dfrac{\theta}{2} - 2r^{3/2} \sin \dfrac{3\theta}{2}$, con b_1 una constante arbitraria.

Sigue a la vuelta...

5. [2.5 puntos] Sea

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,2),\ t > 0 \\ u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 4. \end{cases}$$

1) Resolver por separación de variables

2) Sabiendo que $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$, calcular $u(1,2)$. ¿Cuánto vale $u(x,1)$?

39% de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

5 de Septiembre de 2008

Examen de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2007/08

Consejo muy útil: Siempre que sea **razonable** es conveniente comprobar los resultados.

1. [2 puntos] Sean los polinomios

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = x - a$$
$$P_2 = x^2 + bx + 1/6$$

donde a y b son constantes.

a) Determinar a y b de manera que $\{P_0, P_1, P_2\}$ sean ortogonales en $[0, 1]$ con peso=1.

b) Calcular la combinación lineal de los tres polinomios anteriores (tome como constantes a, b las obtenidas en el apartado anterior) que mejor aproxime a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

en el sentido de *mínimos cuadrados* (recuerde que los coeficientes son entonces los de la serie de Fourier)

2. [2 puntos] Sea $yu_{yy} - 4y^3 u_{xx} - u_y = 0$. Escribir esta ecuación en su forma canónica, hallar su solución general y la que satisface los datos $u(x, 1) = x, u_y(x, 1) = 2x$.

3. [2.5 puntos] a) Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = t. \end{cases}$$

b) Hallar para cada x en $(0, \pi)$ el límite de la solución $u(x, t)$ cuando $t \to \infty$.

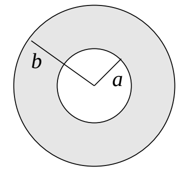
4. [1.5 puntos] i) Calcular por el método de las características la solución general de la ecuación de primer orden

$$(1 + u)u_x + yu_y = u.$$

ii) Calcular la solución que cumple $u(x, 1) = x$.

Sigue a la vuelta...

5. [2 puntos] a) Calcular la única función armónica del plano que en la corona circular de la figura ($0 < a < r < b$) toma los valores $u(a, \theta) = 1$, $u(b, \theta) = \sin^2 \theta$.



b) Decir en qué puntos del plano alcanza $u(r, \theta)$ su valor máximo y mínimo.

$XX\%$ de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

22 de Junio de 2009

Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2008/09

1. [1.5 puntos] Sea el desarrollo de $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ en $(0, 1)$ dado por

$$\sin \frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos n\pi x}{\pi (1 - 4n^2)}.$$

a) encuentre el período de la serie y dibuje la extensión de la función $\sin \frac{\pi x}{2}$ que representa (dibuje tres períodos al menos, por favor).

b) Según los teoremas de convergencia puntual de series trigonométricas, ¿cuanto vale la serie en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$? Halle el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}$.

c) Suponiendo que la igualdad del enunciado puede integrarse término a término, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi x}{n\pi (1 - 4n^2)}$ en $0 \leq x \leq 1$ **y en** $-1 \leq x \leq 0$.

Sol: a) $T = 2$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi x}{n\pi (1 - 4n^2)} = \begin{cases} 1 - \cos \frac{\pi x}{2} - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -1 + \cos \frac{\pi x}{2} - x, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$

2. [3 puntos] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x} \\ u(0, t) = u(1, t) + u_x(1, t) = 0. \end{cases}$$

(Puede hacer el problema directamente o después de hacer el cambio de variables $u = e^{pt+qx} w$, p y q constantes a determinar, que lleve la ecuación a otra más sencilla)

Sol: $u = e^{-t-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} x$

3. [2.5 puntos] Hallar la única solución **acotada** $u(r, \theta)$ del problema en el plano

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \dfrac{2 \sin \theta}{1 + r^2} \\ u(1, \theta) = 1 \end{cases},$$

a) en el círculo $r < 1$, b) en el exterior del círculo $r > 1$. *Atención!!* $r \arctan r \to \infty$ si $r \to \infty$

Sol: a) $u = 1 + \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \arctan r - 1 + (1 - \frac{\pi}{2}) r \right] \sin \theta$ b) $u = 1 + \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \arctan r - 1 + \frac{1}{r} - \frac{r\pi}{2}) \right] \sin \theta$

El aviso que se daba era lo siguiente: en el exterior de un círculo es inusual que $u \sim \frac{r\pi}{2}$. Pero aquí no puede ser de otra manera pues es necesario compensar que $r \arctan r$ diverge como $\frac{r\pi}{2}$ cuando $r \to \infty$. Se compensa restando el término que origina la divergencia.

4. [1.5 puntos] i) Calcular la constante a para que la ecuación de Pfaff

$$3y^2\,dx - axy\,dy + x^4\,dz = 0$$

sea integrable. ii) Resolver la ecuación para ese valor de a y hallar un factor integrante.

Sol: i) $a = 2$ ii) Si $u = z - \dfrac{y^2}{x^3} = k$, k la constante de integración que selecciona a cada superficie de la familia, entonces $\mu = \dfrac{1}{x^4}$. Y nunca olvide que *la u es la k*.

5. [1.5 puntos] a) Calcular la transformada de Fourier $F(k)$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le -a, \quad x \ge a, \\ (a+x)/a^2 & -a \le x \le 0 \\ (a-x)/a^2 & 0 \le x \le a \end{cases}$$

(quizás encuentre usted útil dibujar $f(x)$). ¿Cuál es el valor de $F(k)$ cuando $k = 0$? ¿Hay alguna razón para el valor de $F(0)$ en términos geométricos?

b) Aplicando la transformada de Fourier inversa al resultado obtenido en a), exprese $f(x)$ como una integral en la variable k y deduzca el valor de

$$\int_0^\infty dk\,\frac{1-\cos ka}{k^2}$$

Nota: Antes de empezar el problema escriba **claramente** la definición de *transformada de Fourier* que usted va a utilizar.

Sol: a) Si $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)$, entonces $F(0)$ es el área de la función $f(x)$ entre $(-\infty, \infty)$. O sea, el área de un triángulo de base $2a$ y de altura $1/a$. Luego, sin más cálculos $F(0) = 1$. También se obtiene este resultado con la transformada de Fourier, pues

$$F(k) = \frac{2}{a^2k^2}(1 - \cos ka),$$

que se hace por partes. b) $\int_0^\infty dk\,\dfrac{1-\cos ka}{k^2} = a\pi/2$

29% de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

3 de Septiembre de 2009

Examen final de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2008/09

Consejo muy útil: Siempre que sea **razonable** es conveniente comprobar los resultados.

1. [2 puntos] Reducir a la forma canónica y encontrar la solución general de

$$4\,u_{xx} - y^6 u_{yy} = 3y^5 u_y.$$

2. [2 puntos] Resolver por el método de las características los dos siguientes problemas:

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{l} u_t + e^t u_x + 2tu = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{array} \right. , \qquad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{l} u_t + e^t u_x + 2tu^2 = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{array} \right. .$$

3. [2 puntos] Encontrar la única solución $u(r,\theta)$ del plano que satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = r^2\cos 2\theta, \quad 1 < r < 2, \;\; 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(1,\theta) = u(2,\theta) = 0. \end{array} \right.$$

Dibujar el recinto de integración.

4. [1.5 puntos] Sea $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1\}$ y sea $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Hallar los valores máximos y mínimos de u en D y los puntos en los que se alcanzan estos valores.

5. [2.5 puntos] Resolver por separación de variables el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \left\{ \begin{array}{cl} 2\sin x & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{array} \right. , \quad u_t(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0. \end{array} \right.$$

Comprobar que $u(x,\pi) = -\sin x$.

$XX\%$ de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

6 de Mayo de 2010

Examen Parcial de Ecuaciones Diferenciales II
Curso 2009/10

Consejo muy útil: Siempre que sea **razonable** es conveniente comprobar los resultados.

1. [2.25 puntos] Calcular por el método de las características la solución general de

$$xu_x + (x+y)\, u_y = 1$$

y las soluciones particulares que cumplen los datos: i) $u(1,y) = y$, ii) $u(x,x) = 0$. No hace falta que discuta unicidad.

Sol: Solución general $x\, e^{-u} = f\left(\ln x - \frac{y}{x}\right)$. Solución particular i) $u = \frac{y}{x}$. Solución particular ii) $u = \frac{y}{x} - 1$.

2. [2.5 puntos] Sea la función $f(x) = x(1-x)$ en $(0,1)$.

a) Dibujar al menos **tres** períodos de la función representada por la serie de **senos** de $f(x)$ y calcular los coeficientes de la serie.

b) Usar el resultado anterior para evaluar $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$.

c) ¿Cuánto suma la serie en $[-1,0]$? Discuta los extremos, por favor.

d) Deducir mediante la *identidad de Parseval* la suma de $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots$.

3. [2.25 puntos] Escribir la ecuación

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0$$

en su forma canónica y hallar la solución general.

4. [2 puntos] Determinar los valores de la constante b para que la ecuación de Pfaff

$$y^2\, dx - b\, xz\, dy + b\, xy\, dz = 0.$$

sea integrable y encontrar la primitiva para esos valores de b. ¿Cuál es el factor integrante/intrigante?

5. [1 punto] [El Análisis Infinitesimal en Euler] Partiendo de la función $f(x) = \cos x$, calcular *à la Euler* la suma de $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$.

Ya sabe, use los ceros de $\cos x$ para expresar éste como un producto infinito. Multiplique el producto (unos pocos términos hacen el trabajo, no se pide más) y compare con la serie de potencias de $\cos x$ en $x = 0$.

$XX\%$ de aprobados

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

23 de Junio de 2010

Examen de Ecuaciones Diferenciales II
Grupo C – Curso 2009/10

Consejo muy útil: Siempre que sea **razonable** es conveniente comprobar los resultados.

Alumnos que se examinan de toda la asignatura. Ejercicios: todos. Total: 10 puntos.

Alumnos que se examinan del segundo parcial. Ejercicios: 3, 4 y 5 ii). Total: 5 puntos.

1. [2 puntos] Sea $u(x,t)$ una función definida en $\bar{D} = [0,1] \times [0,3]$ tal que

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{en } D \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = -t \\ u(1,t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t. \end{cases}$$

   Sin resolver el problema, determinar el máximo y mínimo de u en $\bar{D}$ indicando los puntos donde se alcanzan esos valores. Enunciar claramente el *principio del máximo (mínimo)* para la ecuación del calor.

   Sol: Por el *principio del máximo y mínimo* para la ecuación del calor sabemos que el máximo y el mínimo de u tienen que estar o en la línea inicial $t = 0$, o en el borde $x = 0$ o en $x = 1$. El máximo está en $(1,3)$, es decir $u_{max} = u(1,3) = 9$, y el mínimo en $u_{min} = u(0,3) = -3$. La notación es $u(x,t)$.

2. [2 puntos] Calcular la solución $u(x,t)$ de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - 4\,u_{xx} = \sin t, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0 \\ u(x,0) = x^2, \\ u_t(x,0) = -1. \end{cases}$$

   Sol: $u = x^2 + 4t^2 - \sin t$. Por D'Alembert lo más rápido. Kovalevskaia aquí da más guerra.

3. [2 puntos] Encontrar por separación de variables la única solución **acotada** $u(r,\theta)$ del plano que satisface

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \cos^2\theta, \quad r < 1, \; 0 < \theta < \pi, \\ u_r(1,\theta) = a, \; u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0, \end{cases}$$

   especificando el valor de la constante a para que dicha solución exista. **Dibujar el recinto de integración**.

   Sol: $a = 1/4$ y la solución es $u = C + \dfrac{r^2}{8} + \dfrac{r^2}{8}\left(\ln r - \dfrac{1}{2}\right)\cos 2\theta$, C una constante arbitraria. Atención al trozo $r^2 \ln r$, que es inusual y muchos no lo han obtenido.

4. [2 puntos] Resolver por separación de variables el problema

$$\begin{cases} \Delta u + u_x = 0, \quad 0 < x, y < \pi \\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = f(y), \quad 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

para los casos: i) $f(y) = \sin y$, ii) $f(y) = 1$

Sol: i) $u = e^{(\pi - x)/2} \dfrac{\sinh \frac{\sqrt{5}\,x}{2}}{\sinh \frac{\sqrt{5}\,\pi}{2}} \sin y.$

ii) $u = \dfrac{4}{\pi} e^{(\pi - x)/2} \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \dfrac{\sinh \frac{\sqrt{1+4\,(2n-1)^2}\,x}{2}}{(2n-1)\sinh \frac{\sqrt{1+4\,(2n-1)^2}\,\pi}{2}} \sin(2n-1)y$

5. [1+1 puntos] Resolver

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = u \\ u(x,0) = g(x), \end{cases}$$

i) utilizando las características

ii) con la transformada de Fourier.

Sol: Se calcule como se calcule, la solución es $u = g(x - 2t)\, e^t$.

Y como siempre, llegar a las soluciones de manera casual o fortuita o sin una consecuencia lógica en los pasos, no asegura que la puntuación del problema sea la máxima.

$XX\%$ de aprobados