UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I

# Del Quark al Cosmos (2006-2007)

*Los problemas marcados con un asterisco deberán entregarse resueltos al profesor de forma clara, escribiendo bien las matemáticas y hechos lo mejor posible. La fecha de entrega se anunciará en clase. Los problemas que no tienen asterisco los hemos hecho todos en clase.*

## DIMENSIONES Y ÓRDENES DE MAGNITUD

1. $*$ Expresar la masa del barión $\Sigma^+$ ($m_{\Sigma^+} = 1\,189.47\,\mathrm{MeV}/c^2$) y la constante de Rydberg para el hidrógeno ($R_H = 109\,677.576\,\mathrm{cm}^{-1}$) en notación científica (punto flotante) con tres cifras significativas. Hacer lo mismo con el radio de la órbita terrestre ($r = 149.59787 \times 10^6\,\mathrm{km}$) pero esta vez con cuatro cifras significativas.

2. $*$ De las siguientes cantidades una tiene dimensiones de tiempo, otra de longitud y dos de energía. Utilizando análisis dimensional (como en clase), dedúzcase cuál corresponde a cada caso: ($G_N$ es la constante de gravitación universal que aparece en la ley de Newton, $e^2/4\pi\varepsilon_0$ aparece en la ley de Coulomb de atracción o repulsión de cargas eléctricas y $m_e$ es la masa del electrón)

   (a) $G_N m_e/c^2$, (b) $G_N^2 m_e^5/\hbar^2$, (c) $\dfrac{G_N\, e^2 m_e^3}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}$, (d) $\dfrac{4\pi\varepsilon_0\, \hbar^2}{m_e c\, e^2}$

3. $*$ Calcular las siguientes cantidades:

   (a) $\alpha^2 m_e c^2/2$ en eV, donde $\alpha$ es la constante de *estructura fina*

   (b) $B_D/m_p c^2$ donde $B_D = 2.23\,\mathrm{MeV}$ y $m_p$ es la masa del protón

   (c) $\dfrac{4\pi\varepsilon_0\, \hbar^2}{m_e e^2}$ en Å.

4. $*$ Estimar la masa de la Tierra (puede suponerse que la Tierra es una gran esfera hecha de carbono) sabiendo que la distancia de átomo a átomo en un sólido es del orden de $10^{-10}$ m. Una vez hecho el problema búsquese la masa de la Tierra en alguna tabla y compárese con el resultado obtenido. El orden de magnitud del resultado no debe ser muy diferente del tabulado si se han hecho bien los cálculos.

   *Ayuda*: Hará falta un número que conecte la escala microscópica y la macroscópica. Ese número (milagroso) es el *número de Avogadro*. No puede ser otro.

5. $*$ La densidad de la materia nuclear, es decir la densidad de la *substancia* dentro de un núcleo, es más o menos la misma para todos lus núcleos. Expresar esta densidad en unidades macroscópicas $\mathrm{g/cm}^3$.

## RELATIVIDAD ESPECIAL

6. Usando Mecánica Clásica (es decir, no Cuántica) estimar la velocidad de un electrón en el átomo de hidrógeno como una fracción de $c$. ¿Puede considerarse relativista este movimiento?

*Ayuda*: Suponer que la distancia del electrón al protón es del orden del radio de Bohr $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\,\hbar^2/m_e e^2$

7. Un barquero rema sobre su barca en un río cuyas aguas fluyen a una velocidad de 9 km/h. El barquero quiere mantenerse siempre perpendicular a la orilla del río y cruzarlo con una velocidad media de 36 km/h. ¿Con qué velocidad ha de impulsar la barca? ¿En qué dirección? Considérense después tres sistemas de referencia en el problema: uno fijo en la orilla, otro fijo en la barca, el último fijo en un nenúfar puntual que flota sobre el agua. Escríbanse las transformaciones de coordenadas que pasan de uno a otro sistema de referencia.

   *Aclaración*: Nada gira con respecto a nada, sólo hay traslaciones.

8. [*French*] Un suceso tiene lugar en $x' = 60\,\mathrm{m}$, $t' = 8 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$ en un sistema $S'$ ($y' = z' = 0$). El sistema $S'$ posee una velocidad $3\,c/5$ según el eje de las $x$ con relación a un sistema $S$. Los orígenes de $S$ y $S'$ coinciden para $t = t' = 0$ (ie, cuando $t = t' = 0$, $x = x' = 0$). ¿Cuáles son las coordenadas espacio-tiempo del suceso en $S'$? Trazar además un diagrama de Minkowski.

9. [*French*] Dos sistemas de coordenadas inerciales $S$ y $S'$ se mueven con una velocidad $c/2$ el uno respecto al otro. Trazar un diagrama de Minkowski en el que se relacionen ambos sistemas (tómense perpendiculares entre sí los ejes de $S$).

   (a) Dibujar las hipérbolas que permiten definir las distancias a lo largo de los ejes $ct, x, ct'$ y $x'$.

   (b) Situar en el diagrama los siguientes sucesos: $(ct, x) = (1, 1)$, $(ct', x') = (1, 1)$, $(ct', x') = (0, 2)$ y $(ct, x) = (2, 0)$.

   (c) Mediante el diagrama obtenido determinar las coordenadas en $S'$ (ó $S$) correspondiente a los sucesos anteriores.

10. Dibujar un diagrama de Minkowski para dos inerciales $S$ y $S'$ moviéndose el uno con respecto al otro con velocidad $v$ ($S$ tiene los ejes perpendiculares).

    (a) Líneas de simultaneidad en $S'$ son líneas paralelas al eje $x'$. Pintar estas líneas en el dibujo. Sucesos que son simultáneos en $S'$ pero que no ocurren en el mismo punto espacial, ¿son también simultáneos cuando se miran desde $S$?

    (b) Considérese un tachyon (una partícula hipotética que se mueve más deprisa que la velocidad de la luz) que va desde $x = 10\,\mathrm{m}$ hasta $x = -10\,\mathrm{m}$ y recorre la distancia casi instantáneamente según $S$. Pintar la trayectoria del tachyon en el diagrama. De acuerdo al sistema $S'$ ¿viaja el tachyon hacia el futuro o hacia el pasado?. ¿Y si hace el camino de $x = -10\,\mathrm{m}$ $x = 10\,\mathrm{m}$?

    (c) Dibujar en el diagrama dos sucesos que ocurran al revés en el tiempo cuando se miran desde el otro inercial.

11. $*$ [*French*] Las coordenadas espacio-temporales de dos sucesos medidos en un sistema de referencia $S$ son $(ct_1, x_1, y_1, z_1) = (x_0, x_0, 0, 0)$ y $(ct_2, x_2, y_2, z_2) = (x_0/2, 2x_0, 0, 0)$, donde $x_0$ es un número real.

    (a) ¿Existe un sistema de referencia en que estos dos sucesos tengan lugar simultáneamente? Si la respuesta es sí, hallar la velocidad de ese sistema con respecto a $S$.

    (b) ¿Cuál es el valor del tiempo para el que ambos sucesos tienen lugar en el nuevo sistema de referencia?

12. [*French*] Dos sucesos tienen lugar en el mismo instante en un sistema inercial $S$ y están separados por una distancia de 1 km según el eje de las $x$. ¿Cuál es la diferencia de tiempos entre estos dos sucesos medida en un sistema $S'$ que se mueve a velocidad constante según $x$ y en

el cual su separación espacial resulta ser de 2 km? Representar esta situación en un diagrama de Minkowski.

13. $*$ [*French*] Dos sucesos tienen lugar en el mismo sitio en un determinado sistema de referencia y se encuentran separados por un intervalo de tiempo de 4 s. ¿Cuál es la separación espacial entre estos dos sucesos en un sistema inercial en el que los sucesos se encuentran separados por un intervalo de tiempo de 6 s? Hágase un diagrama de Minkowski de esta situación.

14. [*DAMTP, University of Cambridge*] Un cuerpo de masa $m_0$ que se encuentra en reposo se desintegra en dos partes cuyas masas son $m_1$ y $m_2$. Demostrar que la energía de cada parte es

$$E_1 = \frac{c^2}{2m_0}\,(m_0^2 + m_1^2 - m_2^2), \qquad E_2 = \frac{c^2}{2m_0}\,(m_0^2 - m_1^2 + m_2^2).$$

15. [*DAMTP, University of Cambridge*] En un sistema inercial $S$ un fotón con energía $E$ se mueve en el plano $xy$ formando un ángulo $\theta$ con el eje $x$. Demostrar que: (i) en un segundo inercial $S'$ cuya velocidad relativa con respecto a $S$ es $v$ dirigida según el eje $x$, la energía y el ángulo del fotón están dados por

$$E' = \gamma E(1 - \beta\cos\theta), \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta},$$

donde $\beta = v/c$ y $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$; (ii) escribir $E$ y $\cos\theta$ como funciones de $E'$ y $\cos\theta'$. (iii) Demostrar que un fotón moviéndose en la dirección $x$ experimenta un cambio en la frecuencia dado por el factor $\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$. A este cambio se le llama *efecto Doppler relativista*. (iv) A continuación considere una fuente de fotones que está en reposo en $S'$. Considere los fotones emitidos en la dirección hacia delante, i.e., $\cos\theta' > 0$. Demuestre que si $\beta$ es muy próximo a la unidad, esos fotones se verán desde $S$ concentrados en un estrecho cono alrededor de $\theta = 0$. Esto se conoce como *headlight effect* (no traduzco esta frase, está mejor así).

16. [*DAMTP, University of Cambridge*] Los púlsares son estrellas que emiten pulsos de radiación con una frecuencia regular. Jack y Jill son dos gemelos que cuentan pulsos emitidos por un púlsar muy lejano, a miles de años luz de ellos, en la dirección $y$. La muchacha, Jill, viaja a una velocidad dada por $\beta = 24/25$ en la dirección de las $x$ durante 7 años y transcurridos estos años vuelve a la misma velocidad. Mientras tanto Jack se queda en casa. Al final del viaje ambos han contado el mismo número de pulsos. Usar el problema anterior para confirmar que cuando ella regresa ha envejecido 14 años mientras que para él han trascurrido 50.

17. [*DAMTP, University of Cambridge*] En el sistema de laboratorio una partícula de masa $m_1$ y energía $E_1$ colisiona con otra partícula de masa $m_2$ supuesta en reposo. Demostrar que la energía combinada en el sistema de centro de masas es

$$\sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)c^4 + 2E_1 m_2 c^2}.$$

Usando este resultado demostrar que si la colisión tiene lugar entre dos protones (es decir, $m_1 = m_2 = m_p$) moviéndose el primero con energía $E_1$ y suponiendo el segundo en reposo, se puede formar un par protón-antiprotón (además de los dos protones que había originalmente) si $E_1 \geq 7m_pc^2$. A este valor mínimo de la energía se le llama *energía umbral*.

*Nota*: El antiprotón es la antipartícula del protón: misma masa y carga que el protón sólo que la carga es negativa. Un sistema en el que el momento total (el 3-momento total) es cero se llama sistema de *centro de masas* (*centre-of-momentum frame* en inglés).

*Moraleja*: Si un problema parece muy complicado de resolver en el sistema de laboratorio pruébese a analizarlo en el sistema de centro de masas.

18. $*$ En una reacción intervien fotones, electrones y muones entre otras partículas. Los cuadrimomentos de un fotón saliente, de un electrón y de un muón, en un cierto sistema de referencia, son

$$\left(2, -1, -1/3, \frac{\sqrt{103}}{6}\right)\times 10^{-2}, \quad \left(\frac{7}{106}, \frac{2}{53}, \frac{-3}{106}, \frac{\sqrt{6}}{53}\right)\times 10^{-2}, \quad \left(\frac{106\sqrt{2}}{3}, \frac{53\sqrt{3}}{3}, \frac{53}{3\sqrt{2}}, \frac{53}{3\sqrt{2}}\right)\times 10^{-2}.$$

Decir qué cuadrimomento corresponde a cada partícula. Cada entrada viene dada en eV s/m, y el factor $10^{-2}$ afecta a cada una, porque va multiplicando.

*Ayuda*: Sabiendo que $m_e \sim 0.5\,\mathrm{MeV}/c^2$ y $m_\mu \sim 106\,\mathrm{MeV}/c^2$, calcular $m_e c$ and $m_\mu c$ en eV s/m (porque las coordenadas de los cuadrivectores escritos arriba vienen en esas unidades, no por otra cosa). Usad después un invariante muy famoso de las transformaciones de Lorentz.

19. $*$ Un pión que viaja a velocidad $v$ se desintegra en un muón y un neutrino, $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Si el neutrino ($\bar{\nu}_\mu$) sale formando un ángulo de $90^0$ con la dirección del pión incidente, ¿con qué ángulo sale despedido el muón?

*Nota*: Los datos del problema son $v$ y las masas $m_\pi$, $m_\mu$, así que el resultado ha de escribirse en función de estos datos. El neutrino es una partícula de masa nula, como el fotón. Tiene que salir, $\tan\theta = \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)/2\gamma^2\beta$

20. $*$ [*French*] Demostrar que los procesos que se señalan a continuación son imposibles desde un punto de vista dinámico (quiere decir que no se conserva energía-momento: o falla conservación de energía o conservación de momento o ambas):

(a) Un fotón choca con un electrón en reposo y entrega toda su energía al electrón.

(b) Un fotón situado en el espacio libre se transforma en un electrón y un positrón.

(c) Un positrón rápido y un electrón en reposo se destruyen mutuamente dando lugar a un solo fotón.

*Ayuda*: Si una reacción no puede tener lugar en un sistema de referencia no puede tener lugar en ningún otro sistema de referencia (pues se pasa de unos a otros mediante transformaciones de Lorentz). Demostrar que en un sistema de referencia dado (el más sencillo en cada caso) la reacción planteada es imposible. Positrón: la antipartícula del electrón: misma masa y carga pero ésta positiva.

21. $*$ En el problema 17 hemos visto cómo se calculan energías umbrales (threshold energy). Suponiendo que el protón que sirve de blanco en las siguientes reacciones es estacionario (que puede suponerse en reposo en el sistema de laboratorio), calcular las energías umbrales de:

(a) $p + p \longrightarrow p + p + \pi^0$

(b) $\pi^- + p \longrightarrow p + \bar{p} + n$

(b) $p + p \longrightarrow p + p + \pi^- + \pi^+$

*Nota*: $p$ indica un protón, $\bar{p}$ un antiprotón, o sea una partícula igual que el protón, con la misma masa, pero carga opuesta, $n$ es un neutrón y $\pi$ son piones. Sus masas son $m_p = 938.28\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_n = 939.57\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_{\pi^0} = 134.96\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_{\pi^\pm} = 139.57\,\mathrm{MeV}/c^2$

## GRAVITACIÓN Y RELATIVIDAD GENERAL

22. $*$ Escribir las dimensiones de la *constante de gravitación universal* $G$. Comprobar que $2GM/c^2$ donde $M$ es una masa tiene dimensiones de longitud.

23. $*$ Calcular la masa de Saturno si Titán (una de sus lunas) orbita a una distancia media de $1.22 \times 10^6$ Km en períodos de 15.92 días. Despréciese la masa de Titán respecto a la de Saturno.

24. Utilizando el teorema de Gauss calcular:

    (a) El campo gravitatorio debido a una masa de simetría esférica a una distancia $r > a$, siendo $a$ el radio de la masa esférica.

    (b) El campo gravitatorio dentro de una esfera homogénea de radio $a$ a una distancia $r < a$.

    (c) El campo gravitatorio dentro de una masa $M$ de simetría esférica totalmente hueca (tómese el espesor del casquete igual a cero).

25. Calcular la gravedad debida a una tabla infinita de espesor $h$ y densidad de masa $\rho$ a una distancia $l$ de la tabla.

    *Comentario*: La fórmula que se obtiene se conoce con el nombre de *fórmula de Bouguer*.

26. Calcular el campo gravitatorio creado por una masa en forma de hilo vertical de longitud infinita y densidad lineal $\lambda$ a una distancia $r$ del hilo.

27. $*$ Utilizando la ley de Gauss calcular el campo gravitatorio $\mathbf{g}$ dentro de una esfera de radio $a$ y densidad $\rho(r) = \rho_0\, e^{-r/a}$, donde $\rho_0$ es una constante y $0 < r \leq a$.

    *Solución:* $g = 4\pi\rho_0 G_N \left[\frac{2a^3}{r^2} - e^{-r/a} a \left(1 + \frac{2a}{r} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\right]$

28. Considérese una cuña (un plano inclinado) de las siguientes dimensiones: los lados triangulares tienen catetos de 6 m y 8 m, siendo el de 6 m la altura. La anchura del rectángulo que constituye la rampa mide 5 m. Esta cuña está inmersa en un campo $g = 3.5\,\mathrm{N\,Kg^{-1}}$ dirigido en la dirección perpendicular a la cara rectangular de dimensiones $6 \times 5$. Determinar el flujo del campo en cada cara de la cuña. ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa todas las superficies de la cuña?

## PARTÍCULAS ELEMENTALES

*La mayor parte de los problemas de partículas que siguen están sacados del libro* Introduction to elementary particles*, de D. Griffiths. Sin embargo, no hace falta tener este texto para consultar o comprobar las soluciones (que de hecho no vienen en el libro). Pero si necesitáis consultar una referencia, cualquier libro decente de partículas de la biblioteca de Físicas trae estas cosas y más.*

29. [*Griffiths*] La *fórmula de masas de Gell-Mann/Okubo* relaciona las masas de los miembros del octete de bariones (ignorando pequeñas diferencias entre $p$ (protón) y $n$ (neutrón), entre $\Sigma^+, \Sigma^0$ y $\Sigma^-$, y entre $\Xi^0, \Xi^-$) de la forma que sigue:

$$2(m_N + m_\Xi) = 3m_\Lambda + m_\Sigma.$$

Usando esta fórmula junto con las masas conocidas del *nucleón* $N$ (mirar la tabla entregada en clase y usar la media de las masas de $p$ y $n$), $\Sigma$ (lo mismo, usar la media de las tres) y $\Xi$ (también , media de las dos) “predecir” la masa de $\Lambda$. ¿Cómo de cerca se queda uno del valor tabulado?

30. $*$ [*Griffiths*] La misma fórmula de antes aplica a los mesones (cambiando $\Sigma$ por $\pi$, $\Lambda$ por $\eta$, etc), sólo que por misteriosas razones en el caso de mesones se deben usar los *cuadrados* de las masas en lugar de las masas a secas. Usar esto para “predecir” la masa de $\eta$. ¿Cuánto se acerca la masa obtenida al valor tabulado?

31. $*$ [*Griffiths*] Los miembros del decuplete de bariones se desintegran típicamente al cabo de $10^{-23}$ s en un barión más ligero (del octete de bariones) y en un mesón (del octete de mesones). Un ejemplo es $\Delta^{++} \longrightarrow p^{+} + \pi^{+}$. Hágase una lista con todas las posibles desintegraciones de $\Delta^{-}$, $\Sigma^{*+}$ y $\Xi^{*-}$. Recuérdese que cualquier reacción debe conservar carga. Más aún, estas desintegraciones tienen lugar mediante interacciones *fuertes*, así que además deben conservar *extrañeza*.

    Vimos en clase que en cualquier desintegración la masa de la partícula que se desintegra debe ser por lo menos igual a la suma de las masas de los productos de desintegración (si es mayor, la masa extra se convierte en energía cinética del estado final). Compruébese que todas las desintegraciones propuestas en el apartado anterior satisfacen este criterio. De otro modo la reacción estaría cinemáticamente prohibida.

32. $*$ [*Griffiths*] La fórmula de masas para el decuplete de bariones es mucho más simple: –igual espaciamiento entre las filas:

$$M_{\Delta} - M_{\Sigma^*} = M_{\Sigma^*} - M_{\Xi^*} = M_{\Xi^*} - M_{\Omega}$$

    Usar esta fórmula (que fue lo que hizo Gell-Mann) para predecir la masa de $\Omega^{-}$. Usar la media de los dos espaciamientos primeros para estimar el tercero. ¿Cómo de cerca se queda esta predicción del valor observado?

33. $*$ [*Griffiths*] ¿Cuántos mesones diferentes se pueden hacer con $1, 2, 3, 4, 5$ ó $6$ quarks? ¿Y si hubiera $n$ quarks?

34. $*$ [*Griffiths*] ¿Cuántos bariones diferentes se pueden hacer con $1, 2, 3, 4, 5$ ó $6$ quarks? ¿Y si hubiera $n$ quarks?

35. [*Griffiths*] Esbozar el diagrama de Feynman de orden más bajo que representa el scattering $\gamma + \gamma \longrightarrow \gamma + \gamma$. Este proceso, conocido como *Delbruck scattering* no tiene análogo en electrodinámica clásica.

36. [*Griffiths*] Dibujar todos los diagramas de Feynman de cuarto orden (cuatro vértices) del scattering Compton, es decir de $e^{-} + \gamma \longrightarrow e^{-} + \gamma$.

    *Ayuda*: Tienen que salir 17 diagramas. Cada diagrama tiene cuatro vértices, como hemos dicho. Cada vértice tiene tres patas, dos son del fermión (rayas continuas que representan el electrón) y la tercera pata es del fotón (raya ondulada). Los diagramas desconectados no cuentan.

**Comentarios:** Las tablas de partículas que consultan los que trabajan en esto se encuentran en la dirección URL http://pdg.lbl.gov

Si buscáis en estas tablas los gluones, veréis que actualmente se consideran sin masa en el Modelo Standard, aunque se menciona un trabajo de F. Ynduráin de 1995 (*Phys. Let.* **B345** *524*) en el que se establece que una masa de unos pocos MeV para el gluón no estaría tampoco prohibida.

OTHER EXERCISES NOT INCLUDED THIS YEAR

37. Bajo transformaciones de Lorentz las longitudes se acortan en la dirección de la velocidad (en la dirección del movimiento, vaya) mientras que los tiempos se dilatan. ¿Qué sucede con los volúmenes? Especificando más, si un contenedor tiene volumen $V'$ en su propio sistema de referencia $S'$, ¿cuál es el volumen medido por un observador en $S$ que se mueve con velocidad $v$ con respecto a $S'$ según el eje $x$?

38. [*French*] Si un protón con energía cinética de 437 MeV choca elásticamente con un protón en reposo y los dos protones rebotan con energías iguales, ¿cuál es el ángulo existente entre ambos? [R.B. Sutton *et al*, *Phys. Rev.* **97** (1955) 783, hallaron experimentalmente el valor $84.0^o \pm 0.2^o$.]

    Si el protón entrante posee una energía total de 33 GeV, ¿cuál es el ángulo que forman ambos?

    *Ayuda*: Recuérdese, la energía cinética $K$ de una partícula es por definición $K = E - mc^2$, es decir, la energía total $E$ (la que se pone en la entrada superior del cuadrimomento de la partícula) menos la energía de masa.

39. [*French*] Nuestra galaxia mide de extremo a extremo cerca de $10^5$ años-luz y las partículas conocidas con mayor energía poseen una energía de $10^{19}$ eV. ¿Cuánto tiempo tardará un protón que posea esta energía en atravesar la galaxia si el tiempo se mide en el sistema de reposo de la galaxia? ¿Y en el sistema de reposo de la partícula?

    *Comentario*: Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año.

40. [*Griffiths*, pg 94] A pion at rest decays into a muon plus a neutrino. Question: What is the speed of the muon?

41. [*Griffiths*, pg 101. This is exercise 17 but in Griffiths's words] Particle $A$ (energy $E$) hits particle $B$ (at rest), producing particles $C_1, C_2, \ldots$: $A + B \longrightarrow C_1 + C_2 + \cdots C_n$. Calculate the threshold (i.e., minimum $E$) for this reaction, in terms of the various particles masses.

    *Answer*: $E = \dfrac{M^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}\, c^2, \quad \text{where} \quad M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n.$